2. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Érintő

Emlékeztető.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

1. Feladat. *Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!*

a) $f(x) := e^{2x} \sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = 0,$

b) $f(x) := \ln \dfrac{3x-1}{x^2+1} \quad \big(x \in (1/3, +\infty)\big), \qquad a = 1.$

Megoldás.

a) A deriválási szabályok szerint

$$f'(x) = (e^{2x})' \sin x + e^{2x} (\sin x)' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x. \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 1$, így az érintő definíciója szerint a függvény grafikonjának *van érintője* a $(0, f(0))$ pontban. Mivel $f(0) = 0$ és $f'(0) = 1$, ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{y = x}}\,.$$

b) A deriválási szabályok szerint

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{3x-1}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1}{3x-1} \cdot \frac{(3x-1)'(x^2+1) - (3x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+1) - (3x-1)2x}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{-3x^2+2x+3}{(3x-1)(x^2+1)} \qquad (x > 1/3).$$

Ezért $f \in D\{1\}$ és $f'(1) = 1/2$, így az érintő definíciója szerint a függvény grafikonjának *van érintője* az $(1, f(1))$ pontban. Mivel $f(1) = 0$ és $f'(0) = 1/2$, ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}}\,.$$

Megjegyzés. Ebben az esetben a függvényt könnyeben tudjuk deriválni, ha alkalmazzuk az alábbi átalakítást:

$$f(x) := \ln \frac{3x-1}{x^2+1} = \ln(3x-1) - \ln(x^2+1) \qquad (x > 1/3),$$

és így

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

Logaritmikus deriválás

2. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját!*

$$a) \quad f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1), \qquad b) \quad f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-x} \qquad (x > 0),$$

$$c) \quad f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \qquad (x > 1).$$

Megoldás. Az előző feladat megjegyzéséből okulva, ha egy függvény előáll pozitív tényezőfüggvények hatványainak szorzataként, hányadosaként, akkor érdemes a függvény logaritmusát deriválni, hiszen egyrést a deriválási szabályok miatt

$$\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = f(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)',$$

másrészt a függvény logaritmusa felírható a tényezőfüggvények logaritmusának konstans szorosának az összege, különbsége. Ez az ötlet is alkalmazható az $f(x)^{g(x)}$ alakú függvények esetén.

a) Vegyük az f függvény logaritmusát!

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} = \ln\sqrt{1+x} - \ln\left(x^2+1\right)^5 = \frac{1}{2}\ln(1+x) - 5\ln\left(x^2+1\right),$$

ahol $x > -1$. Ezt már könnyebben tudjuk deriválni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \underline{\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - 5\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1} \qquad (x > -1)$$

Ezért minden $x > -1$ esetén

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5}\cdot\left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}\right)}}.$$

b) Vegyük az f függvény logaritmusát!

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x} = (1-x)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (1-x)\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$
$$= (1-x)\big(\ln(x+1)-\ln x\big) \qquad (x>0).$$

Ezt már könnyebben tudjuk szorzatként deriválni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = (1-x)'\cdot\big(\ln(x+1)-\ln x\big) + (1-x)\cdot\Big(\big(\ln(x+1)-\ln x\big)\Big)' =$$
$$= (-1)\cdot\big(\ln(x+1)-\ln x\big) + (1-x)\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1-x}{x\,(x+1)}.$$

Ezért

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1-x}{x\,(x+1)}\right) =$$
$$= \underline{\underline{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x}\cdot\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1-x}{x\,(x+1)}\right)}} \qquad (x>0).$$

c) Vegyük az f függvény logaritmusát!

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(\ln x\big)^{x+1} = (x+1)\cdot\ln(\ln x) \qquad (x>1).$$

Ezt már könnyebben tudjuk szorzatként deriválni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = (x+1)'\ln(\ln x) + (x+1)\cdot\big(\ln(\ln x)\big)' =$$
$$= 1\cdot\ln(\ln x) + (x+1)\cdot\ln'(\ln x)\cdot\ln' x = \ln(\ln x) + (x+1)\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Ezért

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x\ln x}\right) = \underline{\underline{\big(\ln x\big)^{x+1}\cdot\left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x\ln x}\right)}} \qquad (x>1).$$

Inverz függvény deriváltja

Emlékeztető. Az inverz függvényre vonatkozó szabály:

Tétel. *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A differenciálhatóságból következik a folytonosság: $\quad f \in D\{a\} \quad\Longrightarrow\quad f \in C\{a\}.$

A szigorú monotonitás megállapítható a függvény deriváltjával: Ha $f \in D(a,b)$, akkor

$$\text{ha } f' > 0 \ \ [\text{illetve } \ f' < 0\,] \ \ (a,b)\text{-n} \quad\Longrightarrow\quad f \ \uparrow \ [\text{illetve } \downarrow\,] \ \ (a,b)\text{-n}.$$

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi függvények invertálhatók és inverzei differenciálhatók! Számítsuk ki az $(f^{-1})'$ függvény értékét a megadott b pontban!*

a) $f(x) := x^3 + x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b := -2,$

b) $f(x) := 2x + \ln(x^2+1) \quad (x > 0), \qquad b := 2 + \ln 2.$

Megoldás.

a) Világos, hogy $f \in D(\mathbb{R})$, és

$$f'(x) = (x^3+x)' = 3x^2 + 1 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $\mathbb{R}$-en, és így invertálható.

f folytonos $\mathbb{R}$-en, mert differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$ pontban. Legyen $a := -1$. Ekkor

$$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 = b \quad \text{és} \quad f'(a) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így

$$\left(f^{-1}\right)'(-2) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}.$$

b) Világos, hogy $f \in D(0, +\infty)$, és

$$f'(x) = \left(2x + \ln(x^2+1)\right)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} > 0 \qquad (x > 0).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $(0, +\infty)$-en, és így invertálható.

f folytonos $(0, +\infty)$-en, mert differenciálható minden $x > 0$ pontban. Legyen $a := 1$. Ekkor

$$f(a) = f(1) = 2 + \ln 2 = b \quad \text{és} \quad f'(a) = f'(1) = 2 + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = 3.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így

$$\left(f^{-1}\right)'(2 + \ln 2) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Egyoldali pontbeli deriváltak

Emlékeztető. Legyen $b, j \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan pont, hogy $\exists \delta > 0\colon (a-\delta, a) \subset \mathcal{D}_b$, $(a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_j$, és $A \in \mathbb{R}$. Milyen legyenek a b és j függvények ahhoz, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} b(x) & (x \in \mathcal{D}_b \text{ és } x < a) \\ A & (x = a) \\ j(x) & (x \in \mathcal{D}_j \text{ és } x > a) \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az a pontban? Ehhez szükséges, hogy $f \in C\{a\}$, és így

$$\boxed{\text{I.} \quad \exists \lim_{a-0} b,\ \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}\,.$$

Pl. ha b balról, j jobbról folytonos a-ban és $b(a) = j(a) = A$, akkor I. teljesül.

Ha az I. feltétel teljesül, és $b(a) = j(a) = A$, akkor $f \in D\{a\} \iff \boxed{\text{II.} \quad b'_-(a) = j'_+(a)} = f'(a)$.

Pl. ha $b \in D\{a\}$ és $j \in D\{a\}$, akkor a II. feltétel ekvivalens azzal, hogy $b'(a) = j'(a)$.

4. Feladat. *Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott a pontokban!*

$$a)\quad f(x) := \begin{cases} x^2+1 & (x<0) \\ \ln(x^2+1) & (x \geq 0), \end{cases} \qquad a = 0,$$

$$b)\quad f(x) := \begin{cases} 2^x & (x<1) \\ 2 & (x=1) \\ \sqrt{x^3+3} & (x>1), \end{cases} \qquad a = 1,$$

$$c)\quad f(x) := \begin{cases} \cos^2 x & \left(x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ (x-\frac{\pi}{2})^2 & \left(x > \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk az emlékeztetőben szereplő jelöléseket!

a) $A := f(0) = \ln(0^2+1) = 0$, illetve legyen

$$b(x) := x^2+1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \ln(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igaz, hogy $b, j \in C\{0\}$, azonban $1 = b(0) \neq j(0) = 0$. Ezért I. ***nem*** teljesül, azaz $f \notin C\{0\}$, és így $f \notin D\{0\}$. Fontos megjegyezni, hogy a feladatban $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = 2x, \qquad j'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = 0 = j'(0)$, de $f \notin D\{0\}$.

b) $A = 2$, illetve legyen

$$b(x) := 2^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \sqrt{x^3+3} \quad (x > 0).$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$, $j \in D(0, +\infty)$ és

$$b'(x) = 2^x \ln 2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad j'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}} \quad (x > 0).$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{1\}$, és $b(1) = j(1) = 2 = A$.
- II. ***nem*** teljesül, hiszen $b, j \in D\{1\}$, de $2\ln 2 = b'(1) \neq j'(1) = 3/4$.

Ezért $f \notin D\{1\}$.

c) $A := f(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0$, illetve legyen

$$b(x) := \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = -2\cos x \sin x, \qquad j'(x) = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{\pi/2\}$, és $b(\pi/2) = j(\pi/2) = 0 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{\pi/2\}$ és $b'(\pi/2) = 0 = j'(\pi/2)$.

Ezért $f \in D\{\pi/2\}$ és $f'(\pi/2) = 0$.

5. Feladat. *Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?*

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 + b & (x < 1) \\ \dfrac{a}{x} & (x \geq 1). \end{cases} \qquad\qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin ax + b & (x \leq 0) \\ e^{x^2} + x & (x > 0). \end{cases}$$

Megoldás. A deriválási szabályok szerint a feladatban szereplő függvények mindenütt differenciálhatók a paraméterek értékeitől függetlenül, kivéve az átmeneti pontban, ahol külön meg kell vizsgálni a differenciálhatóságot.

a) Legyen

$$b(x) = x^2 + b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) = \frac{a}{x} \quad (x > 0).$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$, $j \in D(0, +\infty)$, valamint

$$b'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j'(x) = -\frac{a}{x^2} \quad (x > 0).$$

Mivel $f(x) = b(x)$ $(x < 1)$ és $f(x) = j(x)$ $(x > 1)$, így $f \in D\{x\}$ $(x \neq 1)$.

Legyen $A := f(1) = a/1 = a$. $f \in D\{1\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

- I. teljesül, azaz $f \in C\{1\}$. Tudjuk, hogy $b, j \in C\{1\}$. Szükséges még, hogy $b(1) = j(1) = A$. Mivel $b(1) = 1 + b$ és $j(1) = a$, így
$$1 + b = a.$$
- $b(1) = j(1) = A$ mellett II. teljesül. Tudjuk, hogy $b, j \in D\{1\}$. Szükséges még, hogy $b'(1) = j'(1)$. Mivel $b'(1) = 2$ és $j'(1) = -a$, így
$$2 = -a.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása $a = -2$ és $b = -3$. Ekkor $f \in D(\mathbb{R})$.

b) Legyen

$$b(x) = \sin ax + b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) = e^{x^2} + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = a \cos ax \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j'(x) = e^{x^2} \cdot 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f(x) = b(x)$ $(x < 0)$ és $f(x) = j(x)$ $(x > 0)$, így $f \in D\{x\}$ $(x \neq 0)$.

Legyen $A := f(0) = \sin(0) + b = b$. $f \in D\{0\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

- I. teljesül, azaz $f \in C\{0\}$. Tudjuk, hogy $b, j \in C\{0\}$. Szükséges még, hogy $b(0) = j(0) = A$. Mivel $b(0) = b$ és $j(0) = 1$, így
$$b = 1.$$
- $b(0) = j(0) = A$ mellett II. teljesül. Tudjuk, hogy $b, j \in D\{0\}$. Szükséges még, hogy $b'(0) = j'(0)$. Mivel $b'(0) = a$ és $j'(0) = 1$, így
$$a = 1.$$

Ezért a feladat megoldása $a = 1$ és $b = 1$. Ekkor $f \in D(\mathbb{R})$.