5. gyakorlat

ELEMI FÜGGVÉNYEK ÉS TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

Elemi függvények

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!*

$$\arcsin\frac{1}{2},\qquad \arcsin(\sin 10),\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad \operatorname{arc\,tg} 1.$$

Megoldás.

- $\underline{\arcsin\frac{1}{2}}$: Az $\arcsin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\underset{\left(x\in[-1,1]\right)}{\arcsin x} = \underset{\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{y} \iff \sin y = x.$$

Ezért $\arcsin\frac{1}{2} = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6}.$

Így $\underline{\underline{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}}$.

- $\underline{\arcsin(\sin 10)}$: Az előzőhöz hasonlóan az adódik, hogy

$$\arcsin(\sin 10) = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \sin 10.$$

Emlékeztetünk arra, hogy

$$\sin y = \sin z \iff y - z = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + z = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}).\ \text{ Így}$$

$$\sin y = \sin 10 \iff y - 10 = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + 10 = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Mivel $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ezért a $\pi \approx 3{,}14$ közelítést felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$. Az első eset tehát nem lehetséges. A második esetben $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pontosan akkor teljesül, ha $l = 1$, azaz $y = -10 + 3\pi$ (≈ -0.58). Ezzel beláttuk, hogy $\underline{\underline{\arcsin(\sin 10) = -10 + 3\pi}}$.

- $\underline{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$: Az $\arccos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\underset{\left(x\in[-1,1]\right)}{\arccos x} = \underset{\left(y\in[0,\pi]\right)}{y} \iff \cos y = x.$$

Ezért $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0,\pi] \iff \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff y = 3\cdot\frac{\pi}{4}.$

Így $\underline{\underline{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}}}$.

- $\underline{\operatorname{arc\,tg} 1}$: Az $\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\underset{\big(x\in\mathbb{R}\big)}{\operatorname{arc\,tg} x} = \underset{\big(y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\big)}{y} \iff \operatorname{tg} y = x,$$

Ezért $\operatorname{arc\,tg} 1 = y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg} y = 1 \iff y = \frac{\pi}{4}$.

Így $\underline{\underline{\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}}}$.

2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Megoldás. Legyen $f(x) := \arcsin x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$.

Az elemi függvények deriválhatóságaiból és a deriválási szabályokból az következik, hogy $f \in D(-1,1)$. Most kiszámoljuk $f'(x)$-et. Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$f'(x) = (\arcsin x)' - \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1-x^2\right) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Így $\forall x \in (-1,1)$: $f'(x) = 0$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c$ $\big(\forall x \in (-1,1)\big)$. Mivel $f(0) = \arcsin 0 - \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$, ezért $c = 0$. A feladat állítását tehát bebizonyítottuk.

Aszimptoták

Emlékeztető. ***Definició.*** *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **van aszimptotája $(+\infty)$-ben**, *ha*

$$\exists l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény **aszimptotája $(+\infty)$-ben**. *A függvény* **$(-\infty)$-beli aszimptotáját** *is hasonló módon értelmezzük.*

Az aszimptoták meghatározására a következő állítást ismertük meg:

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

3. Feladat. *Van-e az alábbi függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.*

a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$, *b)* $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$,

c) $f(x) := x - 2\operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Az aszimptoták létezésére és meghatározására vonatkozó tételt alkalmazzuk. A tételből rögtön következik, hogy ha létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben, és ez a B számmal egyenlő, akkor $y = B$ a függvény aszimptotája a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben.

a) Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^3 + x^2\right) = \pm\infty,$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek sem $(+\infty)$-ben sem $(-\infty)$-ben nincs aszimptotája.

b) Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} =$$

$$= \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = 1 := B,$$

azaz létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben, és mindkettő a $B = 1$ számmal egyenlő. Tehát f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = 1$ egyenletű egyenes.

c) Előadáson tanultuk, hogy $\operatorname{arc\,tg}$ korlátos függvény, és

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény korlátossága miatt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right) = 1 - 0 = 1 := A.$$

- Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to+\infty} (x - 2\operatorname{arc\,tg} x - 1\cdot x) = -2 \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\pi := B_1$$

ezért f-nek $(+\infty)$-ben van aszimptotája, és ez az $y = x - \pi$ egyenletű egyenes.

- Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to-\infty} (x - 2\operatorname{arc\,tg} x - 1\cdot x) = -2 \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi := B_2$$

ezért f-nek $(-\infty)$-ben van aszimptotája, és ez az $y = x + \pi$ egyenletű egyenes.

4. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!*

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok.*** f polinomfüggvény, ezért $f \in D^\infty(\mathbb{R})$. f zérushelyei nehezen meghatározhatók, ezért nem fogunk előjelvizsgálatot végezni. A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás, lok. szélsőértékek.*** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 3.$$

	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	10	$\downarrow$	-17	$\uparrow$
lok.		$-$		min	

Vegyük észre, hogy 0 nem lokális szélsőértékhely, és f szigorúan monoton csökkenő $(-\infty, 3]$-n.

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás.*** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 2.$$

	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	10	$\frown$	-6	$\smile$
		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták.*** A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

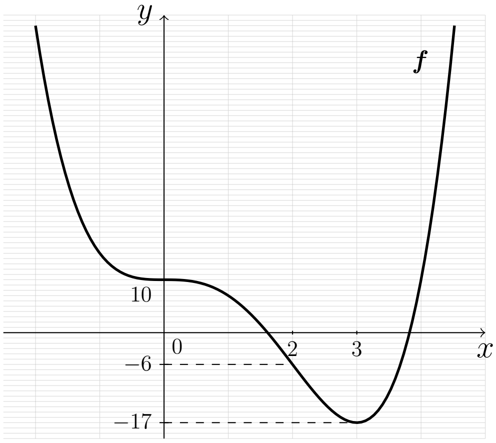
Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek nincs aszimptotája sem $(+\infty)$-ben, sem $(-\infty)$-ben.

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja.*** $\longrightarrow$



5. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!*

$$f(x) := \frac{x^3+x}{x^2-1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big)$$

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok.*** A deriválási szabályok alapján f minden $x \neq \pm 1$ pontban akárhányszor deriválható. A függvény páratlan, hiszen

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3+x}{x^2-1} = -f(x) \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big).$$

Másrészt

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1} = \frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

Előjelvizsgálat

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f	$-$	$+$	0	$-$	$+$

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás, lok. szélsőértékek.*** Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(x^2-1) - (x^3+x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-2)^2 - 5}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^2-2)^2 - 5 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 2 \pm \sqrt{5}$$

Mivel csak $2+\sqrt{5} > 0$, így $x = x_1 := \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2,058$ vagy $x = -x_1 \approx -2,058$.

	$x<-x_1$	$-x_1$	$-x_1<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<x_1$	x_1	$x>x_1$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$-3,33$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	3.33	$\uparrow$
lok.		max				min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás.*** Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2 - (x^4-4x^2-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f''	$-$	$+$	0	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	0	$\frown$	$\smile$
			infl.		

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, ill. a -1 és az 1 pontok bal és jobb oldalán kell megvizsgálni. Mivel tudjuk, hogy a függvény páratlan, így a számítások leegyszerűsödnek.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x^2-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{2x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2} = +\infty, \qquad \text{és így} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad (f \text{ páratlan}).$$

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{x^3+x}{x+1} \cdot \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{1}{x-1} = \frac{2}{2} \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

és így $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = \pm\infty$, hiszen f páratlan.

Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x}{x^3-x} = \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{3x^2-1} =$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1 := A,$$

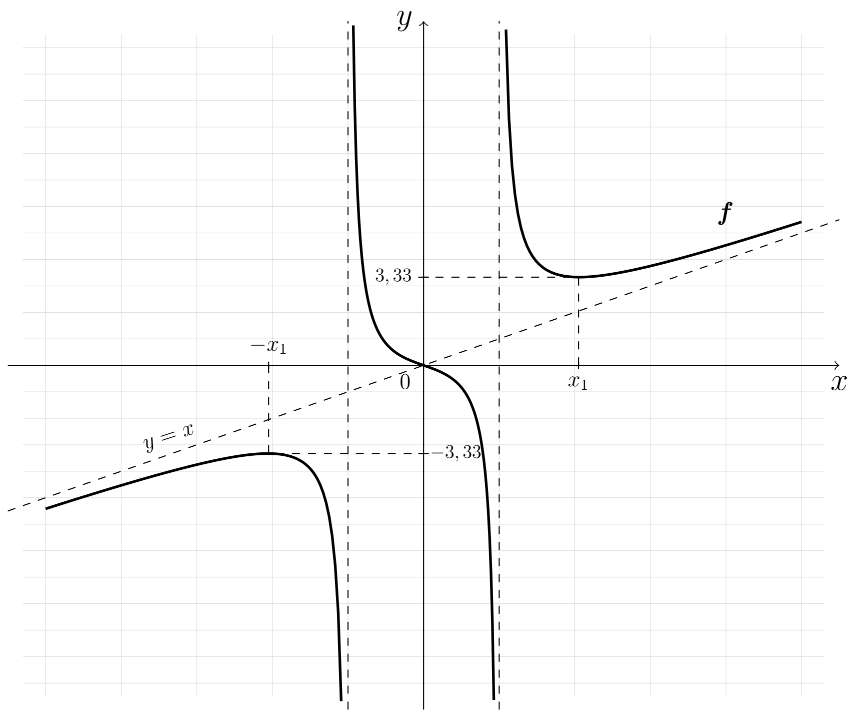
és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+x}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x} = 0 := B$$

ezért f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = x$ egyenletű egyenes

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja***.



6. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az*

$$f(x) := \frac{e^x}{x+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján f akárhányszor differenciálható minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ pontban. f-nek nincs zérushelye, mert

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x = 0.$$

Előjelvizsgálat

	$x < -1$	$x > -1$
f	$-$	$+$

A függvény nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás, lok. szélsőértékek***. Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

A következő táblázat tartalmazza a derivált függvénnyel végzett előjelvizsgálatot és ennek következményeit.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	$\downarrow$	1	$\uparrow$
lok.			min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén

$$f''(x) = \frac{(xe^x)'(x+1)^2 - xe^x 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(1 \cdot e^x + xe^x)(x+1) - 2xe^x}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{e^x(x+1)^2 - 2xe^x}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3} \neq 0$$

A következő táblázat tartalmazza a második derivált függvénnyel végzett előjelvizsgálatot és ennek következményeit.

	$x < -1$	$x > -1$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket a $(+\infty)$-ben, $(-\infty)$-ben, valamint a féloldali határértékeket -1-ben kell megvizsgálni:

$$+\infty: \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$-\infty: \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$-1 \pm 0: \quad \lim_{x\to-1\pm 0} \frac{e^x}{x+1} = \pm\infty.$$

Aszimptoták:

$-\infty$-ben: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ miatt a függvénynek $-\infty$-ben van aszimptotája, az aszimptota egyenesének egyenlete: $y = 0$.

$+\infty$-ben:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty,$$

így f-nek a $+\infty$-ben nem létezik aszimptotája.

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja***.