6. gyakorlat

TAYLOR-POLINOMOK ÉS TAYLOR-SOROK

Emlékeztető. ***Tétel. (Lineáris közelítés)*** *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \lim\limits_a \varepsilon = 0: \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Az f függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól" közelíthető lineáris függvénnyel. Ennek a lineáris függvénynek a grafikonja az

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

egyenletű egyenes, ami az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli ***érintője***.

Ha $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a

$$T_{n,a}f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot ***az f függvény** a **ponthoz tartozó** n-**edik Taylor-polinomjának*** nevezzük.

Tétel. (Taylor-formula) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall x \in K(a)\text{-hoz } \exists \xi \text{ } a \text{ és } x \text{ között}: \qquad f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** *nevezzük.*

Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a

$$T_a f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az ***f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának*** nevezzük.

A Taylor-sor részletösszegei a függvény Taylor-polinomjai.

Tétel. *Minden pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénye a Taylor-sorával egyenlő a konvergenciahalmaz belsejében.*

1. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1) \qquad \text{és} \qquad A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}}.$$

a) *Milyen lineáris becslést tudunk adni az f függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele az A értéket, és adjunk hibabecslést!*

b) *Írjuk fel az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon legfeljebb mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!*

c) *A b) pontban kapott becslés felhasználásával adjunk újabb becslést az A számra, és becsüljük meg a közelítés hibáját!*

Megoldás. Vegyük először észre, hogy

$$A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = \frac{B}{10}, \qquad \text{ahol} \quad B := \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\left(\tfrac{3}{100}\right).$$

A tanult módszerekkel az érték- és hibabecslést B-re érdemes meghatározni, hiszen $3/100$ már az $a = 0$ közelében van, és majd ezekből, tízzel elosztva, megkapjuk az A-ra vonatkozó becsléseket.

a) $\mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$, $a = 0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D(-1, +\infty)$ és minden $x > -1$ pontban

$$f(x) = (1+x)^{-1/3}, \qquad f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}.$$

Ezért $f(0) = 1$ és $f'(0) = -1/3$, amiből a keresett lineáris becslés:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \sim f(0) + f'(0)(x-0) = 1 - \frac{x}{3} \qquad \text{és így} \qquad B = f\left(\tfrac{3}{100}\right) \approx 1 - \frac{\frac{3}{100}}{3} = 0,99.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk, hiszen a lineáris becslésben szereplő elsőfokú polinom megegyezik az $n = 1$-re vonatkozó Taylor-polinommal.
Legyen $x = 3/100$. A Taylor-formula szerint $\exists \xi \colon 0 < \xi < x = 3/100$, hogy

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{f''(\xi)}{2!} x^2.$$

Mivel

$$f''(x) = \frac{4}{9}(1+x)^{-7/3} = \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+x)^7}} \qquad (x > -1),$$

így ha $x = 3/100$, akkor

$$|B - 0,99| = \left| f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right)\right| = \frac{|f''(\xi)|}{2!}|x|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+\xi)^7}} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 <$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+0)^7}} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{10000} = 0,0002.$$

Ennek következtében $A = B/10 \approx 0,099$ és $|A - 0,099| < 0,00002$.

b) Az $f(x) = (1+x)^{-1/3}$ $(x > -1)$ függvény akárhányszor deriválható, és

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3}$$

minden $x > -1$ pontban. Ezért $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$, $f''(0) = 4/9$, illetve $f'''(0) = -28/27$. Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$T_{3,0}f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk. Legyen $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right]$. Ekkor $\exists \xi_x \colon 0 < \xi_x < x \leq 1/10$, hogy

$$f(x) - T_{3,0}f(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \cdot x^4.$$

Mivel
$$f^{(4)}(\xi_x) = \frac{280}{81} \cdot (1+\xi_x)^{-13/3} = \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi_x)^{13}}} \qquad (x > -1),$$
így
$$\Big| f(x) - T_{3,0}f(x) \Big| = \frac{|f^{(4)}(\xi_x)|}{4!} \cdot |x|^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi_x)^{13}}} \cdot |x|^4 <$$
$$< \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+0)^{13}}} \cdot \Big(\frac{1}{10}\Big)^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{10000} = 0,0000144.$$

c) Az előző pontban kapott képlet alapján
$$B = f\Big(\frac{3}{100}\Big) \approx T_{0,3}f\Big(\frac{3}{100}\Big) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{9} \cdot \Big(\frac{3}{100}\Big)^2 - \frac{14}{81}\Big(\frac{3}{100}\Big)^3 = 0,990195\dot{3}.$$
A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk most az $x = 3/100$ esetén. Ekkor $\exists \xi \colon 0 < \xi < x = 3/100$, hogy
$$\Big| f(x) - T_{3,0}f(x) \Big| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \cdot |x|^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi)^{13}}} \cdot |x|^4 <$$
$$< \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+0)^{13}}} \cdot \Big(\frac{3}{100}\Big)^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81} \cdot \Big(\frac{3}{100}\Big)^4 = \frac{35}{3} \cdot 10^{-8} < 1,2 \cdot 10^{-7}$$
Tehát $A = B/10 \approx 0,0990195\dot{3}$ és $\Big|A - 0,0990195\dot{3}\Big| < 1,2 \cdot 10^{-8}$.

2. Feladat. *Legyen* $f(x) := \ln(1+x)$ $(x > -1)$.

a) *Határozzuk meg az* $f(x)$ *függvény második* $T_{2,0}f$ *Taylor-polinomját a* 0 *pontban!*

b) *Közelítsük meg az* $\ln 2$ *értékét a* $T_{2,0}f(1)$ *segítségével, és becsüljük meg a hibát!*

c) *Becsüljük meg a közelítés hibáját* $f(x) \approx T_{2,0}f(x)$ *esetén, ha* $x \in [-1/2, 0]$ *és* $x \in [0, 2]$.

Megoldás.

a) Először meghatározzuk a $T_{2,0}f$ polinom együtthatóit:
$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(0) = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(0) = -1.$$
Tehát
$$T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x - \frac{1}{2}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Mivel $\ln(2) = \ln(1+1) = f(1)$, ezért

$$\ln 2 = f(1) \approx T_{2,0}f(1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

A hiba becsléséhez legyen $a = 0$ és $x = 1$. A Taylor-formula szerint létezik egy $0 < \xi < 1$ úgy, hogy

$$f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Mivel

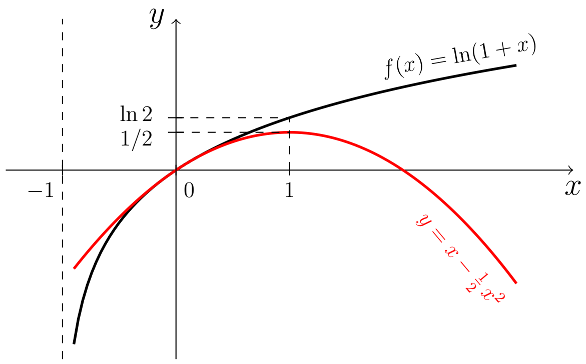
$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad (x > -1),$$

ezért

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|x|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3}|x|^3$$

ahol $x = 1$, de ξ értéke ismeretlen, csak annyit tudunk, hogy $0 < \xi < x = 1$. A becsléshez megjegyezzük, hogy a fenti kifejezés csökken ξ függvényében. Ezért

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3}|x|^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+0)^3} \cdot 1^3 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$



c) Az előző pontban használt becslést alkalmazzuk:

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|x|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3}|x|^3$$

ahol x értéke 0 és x között van.

- Az első esetben $-\frac{1}{2} \leq x < \xi < 0$, így

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right|^3 = \frac{1}{3}.$$

- A második esetben $0 < \xi < x < 2$, így

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+0)^3} \cdot |2|^3 = \frac{8}{3}.$$

3. Feladat. *Az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja segítségével adjunk becslést a $\sqrt{e}$ értékére és adjunk hibakorlátot! A becslések kiszámításakor kizárólag a négy alapműveletet szabad használni.*

Megoldás. Az exp függvényt egy 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük, ezért ennek részletösszegei az exp függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai. Ezért az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja

$$T_{4,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

amelynek értéke az $x = 1/2$ pontban $1,6484375$. Ezért $\sqrt{e} = e^{1/2} \approx T_{4,0}f(1/2) = 1,6484375$.

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk. Legyen $x = 1/2$. Ekkor igaz, hogy $\exists\xi\colon 0 < \xi < x = 1/2$, hogy

$$f(x) - T_{4,0}f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot x^5 = \frac{e^\xi}{5!} \cdot x^5.$$

Így $$\Big|f(x) - T_{4,0}f(x)\Big| = \frac{e^\xi}{5!} \cdot |x|^5 < \frac{2}{120} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,00052084,$$

hiszen $e^\xi < e^{1/2} < 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$. A hibakorlát tehát $0,00052084$.

Emlékeztető. Egy f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának a felírásához kétféle módon járhatunk el.

a) A definíció értelmében meghatározzuk a függvény *összes* magasabb rendű deriváltját az a pontban, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása általában nem egyszerű feladat, de néhány esetben ki lehet következtetni az első néhány deriválás után. Ezzel fel tudjuk írni a keresett Taylor-sort, de még meg kell határozni a konvergenciahalmazát, illetve megvizsgálni milyen pontokban állítja elő a függvényt.

b) Egy ismert függvény hatványsoros előállításából kiindulva helyettesítéssel, tagonkénti deriválással vagy egyéb módon megkapjuk a függvény hatványsorba fejtését egy $K(a)$ környezetben, amiről azt tanultuk, hogy a függvény Taylor-sora lesz. Ezzel rögtön kapunk egy konvergenciahalmazt, ahol a Taylor-sor előállítja a függvényt.

4. Feladat. *Milyen $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens az*

$$\sum_{n=0}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

hatványsor, és mi az összegfüggvénye?

Megoldás. A hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum, hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n+1|}} = 1,$$

középpontja $a = 0$, illetve az $x = \pm 1$ pontokban divergens, mert ekkor a kapott sorok általános tagja nem tart nullához.

Az összegfüggvény meghatározásához vegyük észre, hogy a $\sum\limits_{n=1} x^n$ sor konvergenciahalmaza szintén a $(-1,1)$ intervallum, és

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots\right)' = 1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \quad \text{és} \quad g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Ekkor a mértani sor összegére vonatkozó képlet alapján

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} \qquad \big(x\in(-1,1)\big),$$

és így

$$f(x) = g'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

Beláttuk tehát azt, hogy

$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots+nx^{n-1}+\dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{ha } x\in(-1,1).$$

5. Feladat. *Adjuk meg az k a*

$$f(x) := \sin^2 x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény 0 pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

Megoldás. Először a tanult trigonometrikus azonosságokkal fogjuk a $\sin^2 x$ függvényt „linearizálni”. Ha egymásból kivonjuk a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{és} \qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

azonosságokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

A cos függvény értelmezési szerint:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ebből azonnal felírhatjuk a $\cos 2x$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát, amely a teljes $\mathbb{R}$-en állítja elő a függvényt:

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot 4^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-4)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ezért a keresett Taylor sor:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-4)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \, x^{2n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-4)^{n-1}}{(2n)!} \, x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$