8. gyakorlat

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 2.

Racionális törtfüggvények integrálása

Racionális törtfüggvénynek nevezzük két polinom hányadosát, azaz a $\frac{P}{Q}$ alakú függvényeket, ahol P és $Q \not\equiv 0$ algebrai polinomok. Azt is feltesszük, hogy P-nek és Q-nak nincsenek közös gyökeik. Mivel minden racionális törtfüggvény folytonos, így van primitív függvénye bármely olyan nyílt intervallumon, ahol a függvény értelmezett. Látni fogjuk, hogy „legalább is elvben" ki lehet számítani ezeket a primitív függvényeket.

Már az előző gyakorlaton elemi fogásokkal és az első helyettesítési szabály alkalmazásával ki tudtunk integrálni néhány racionális törtfüggvényt. Ezek a módszerek gyors eredményhez vezettek, és ha észrevesszük, hogy a feladatunk ilyen módon oldható meg, akkor célszerű ezt az utat választani. Például az

$$\int \frac{2x^7+x^3}{x^8+x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x^7+4x^3}{x^8+x^4+1}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = \frac{1}{4}\ln(x^8+x^4+1)+c \qquad (x\in\mathbb{R})$$

integrálnak ez a legegyszerűbb kiszámítási módja. De ha ezt nem vesszük észre vagy olyan a feladat, hogy nem tudjuk rögtön alkalmazni az elemi módszereket, akkor megnyugtató, hogy van egy több lépésből álló eljárás, ami sokszor hosszadalmas, de nagyobb trükkök nélkül a megoldáshoz vezethet.

Az eljárás alappillérei néhány elemi tört, amit nagyobb nehézségek nélkül tudunk integrálni, bár egyikük kiszámítása elég hosszadalmas.

Alaptípusok (elemi törtek)

1. alaptípus: Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$ adott számok, illetve $I := \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ vagy $I := \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx \qquad (x\in I).$$

Lineáris helyettesítéssel rögtön igazolható, hogy

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}+c \qquad (x\in I),$$

illetve, ha $n>1$, akkor

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \int (ax+b)^{-n}\,dx = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)}+c \qquad (x\in I).$$

Példák:

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{\ln|2x-1|}{2}+c = \frac{\ln(1-2x)}{2}+c \qquad \left(x<\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \int (2x-1)^{-2}\,dx = \frac{(2x-1)^{-1}}{2\cdot(-1)}+c = \frac{1}{2-4x}+c \qquad \left(x<\tfrac{1}{2}\right).$$

2. alaptípus: Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ adott számok, és I olyan nyílt intervallum, amire $ax^2 + bx + c > 0$ vagy $ax^2 + bx + c < 0$ teljesül, ha $x \in I$. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x \in I).$$

Itt az integrandus $\frac{f'}{f}$ alakú, ezért

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C \qquad (x \in I).$$

Példa:

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln(x^2-1) + c \qquad \text{ha } \ x \in (-\infty, -1) \ \text{ vagy } \ x \in (1, +\infty),$$

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln(1-x^2) + c \qquad \text{ha } \ x \in (-1, 1).$$

3. alaptípus: Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ olyan számok, amelyekre $b^2 - 4ac < 0$ teljesül. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A nevezőben lévő másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, hiszen diszkriminánsa negatív a $b^2 - 4ac < 0$ feltétel miatt. Az integrandus tehát valóban értelmezhető az egész $\mathbb{R}$-en. Teljes nézetre való alakítással $ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta > 0$, mert a másodfokú polinomnak nincs valós gyöke. Ekkor lineáris helyettesítéssel:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a(x+\alpha)^2+\beta}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{\left(\sqrt{a/\beta}(x+\alpha)\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/\beta}(x+\alpha)\right)}{\sqrt{a/\beta}} + C = \frac{1}{\sqrt{a\beta}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{a/\beta}(x+\alpha)\right) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Példa: Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + c = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

4. alaptípus: Legyenek $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olyan számok, amelyekre $b^2 - 4ac < 0$ teljesül. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebben az esetben célszerű olyan γ és δ számokat keresni, amivel a számlálót felírjuk

$$Ax + B = \gamma(2ax+b) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

alakban. Ezzel a keresett integrált fel tudjuk írni két integrál lineáris kombinációjaként, ahol az egyik integrál a 2. alaptípusból és a másik integrál a 3. alaptípusból való.

5. alaptípus: Legyenek $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, és $1 < n \in \mathbb{N}$ olyan számok, amelyekre $b^2 - 4ac < 0$ teljesül. Tekintsük a következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az ilyen integrálok kiszámítása a következő rekurzív formulában alapszanak, amely teljes indukcióval, parciális integrálással igazolható:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A fenti formula alkalmazása nagyon sok számítással jár, ezért nem fogunk olyan feladatokat megoldani, amelyek ilyen alaptípusú integrálokhoz vezetnek.

Az általános eset (a parciális törtekre bontás módszere)

Tetszőleges $\frac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény integrálását az teszi lehetővé, hogy *minden ilyen tört felírható egy polinomnak és elemi törteknek (az ún.* ***parciális törteknek****) az összegeként.*

Az eljárás egyes lépései a következők:

1. lépés ***A polinom „leválasztása” (maradékos osztás).***

Legyenek P és $Q \not\equiv 0$ polinomok. Ekkor egyértelműen léteznek olyan T és P^* polinomok, hogy a P^* polinom fokszáma kisebb, mint a Q polinom fokszáma, és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_Q).$$

A felbontást *polinomosztással*, de néhány esetben egyszerű átalakításokkal kaphatjuk meg. Például

$$\frac{2x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = \frac{2x^4 + 2x + x^2 + 1}{x^3 + 1} = \frac{2x(x^3+1) + x^2 + 1}{x^3+1} = 2x + \frac{x^2+1}{x^3+1}.$$

2. lépés. ***A nevező szorzatra bontása.***

A nevezőben levő Q polinomot (ameddig csak lehet) valós együtthatós polinomok szorzatára bontjuk. Például:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4),$$

$$Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

$$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3,$$

$$Q(x) = x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1),$$

$$Q(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Figyeljük meg, hogy a felbontásban elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei. Ez általánosan is igaz. Bebizonyítható, hogy minden Q valós együtthatós polinom felírható valós együtthatós első- és másodfokú tényezők szorzataként, ahol a másodfokú tényezőknek már nincsenek valós gyökeik.

Ez a lépés a módszer legkényesebb része, hiszen ilyen szorzatrabontás általánosan „csak elvben” létezik. Ti. ilyen felbontásból könnyedén megkapjuk a polinom valós és komplex gyökeit, azonban tudjuk, hogy az öt vagy annál nagyobb fokszámú polinomok gyökeinek meghatározására nincs megoldóképlet.

3. lépés. ***Elemi törtek összegére bontásának a módszere.***

Itt már csak olyan $\frac{P}{Q}$ alakú törteket tekintünk, amelyeknél a **számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma**, és sikerült ***Q szorzatrabontását*** elvégezni, azaz túl vagyunk az első két lépésen. Az ilyen törtek a nevezőtől függően elemi törtek összegére bonthatók. A felbontást *határozatlan együtthatókkal* keressük. Például:

$$\frac{1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-4}, \qquad \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1},$$

$$\frac{x+1}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}, \qquad \frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2},$$

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy az elsőfokú tényezők esetén a számlálóban egy *állandót*, a másodfokú tényezők esetén pedig a számlálóban egy *elsőfokú polinomot* kell venni. Azt is vegyük észre, hogy ha a nevezőben az elsőfokú tényező egynél nagyobb kitevővel szerepel, akkor *minden* alacsonyabb kitevőjű tagot is „be kell vennünk”. Ugyanez a helyzet a másodfokú tényezők esetében is.

Az A_i, B_i, C_i együtthatók meghatározásakor a következő módon járunk el: a jobb oldalon hozzunk közös nevezőre, és ekkor az így adódó tört számlálója egyenlő a bal oldalon levő tört számlálójával minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (még olyan pontokban is, ahol a nevező nulla, hiszen a számlálóban lévő polinomok folytonos függvények). Ekkor kétféle módon tudunk folytatni:

a) a jobb oldali tört számlálóját x hatványai szerint rendezzük. Két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatói megegyeznek. A két oldal számlálójában az együtthatók egyenlőségéből a határozatlan együtthatókra egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldásai a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók.

b) alkalmas x értékeket behelyettesítünk a két tört számlálójában, amelyekről tudunk, hogy egyenlőek minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel egyszerű egyenleteket kapunk, amelynek megoldásai szintén a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók.

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx \quad \big(x \in (2,4)\big),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \big(x \in (-1,+\infty)\big),$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$

Megoldás. A parciális törtekre bontás módszert fogjuk alkalmazni.

a) A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, továbbá a nevező elsőfokú tényezők szorzata. A parciális törtekre bontás alapján közös nevezőre hozással

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}.$$

A bal és a jobb oldali tört számlálója megegyezik. Említettük, hogy az A és B számokat kétféle módon számíthatjuk ki:

i) a jobb oldali tört számlálóját x hatványai szerint rendezés után, a két számlaló egyenlőségből

$$1 = (A+B)x - 4A - 2B \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik megegyeznek, azaz

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-2B=1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -2A = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = -\tfrac{1}{2} \;\text{ és }\; B = \tfrac{1}{2}.$$

ii) a két számlaló egyenlőségből

$$1 = A(x-4) + B(x-2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x = 2$, akkor $1 = A \cdot (-2) + B \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -1/2$.
Ha $x = 4$, akkor $1 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1/2$.

Következésképpen

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-4}.$$

Így, ha $2 < x < 4$, akkor

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-4| + c = -\frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(4-x) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\ln(4-x) - \ln(x-2)) = \frac{1}{2}\ln\frac{4-x}{x-2} + c = \ln\sqrt{\frac{4-x}{x-2}} + c.$$

b) Vegyük észre, hogy $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. A parciális törtekre bontást után

$$\frac{3x-5}{x^2+2x+1} = \frac{3x-5}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}.$$

A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor
Ha $x = -1$, akkor $3 \cdot (-1) - 5 = A \cdot 0 + B \quad \Longrightarrow \quad B = -8$.
Ha $x = 0$, akkor $3 \cdot 0 - 5 = A \cdot 1 + B \quad \Longrightarrow \quad -5 = A - 8 \quad \Longrightarrow \quad A = 3$.
Ezért, ha $x > -1$, akkor

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{8}{(x+1)^2}\right)dx = 3\ln(x+1) + \frac{8}{x+1} + c.$$

c) A számláló fokszáma most **nagyobb**, mint a nevező fokszáma, ezért először maradékos osztást kell végeznünk:

$$(*)\qquad \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}=\frac{x\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)+4}{x^2-1}=x+1+\frac{4}{x^2-1}.$$

A fennmaradó törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $x\in\mathbb{R}$ esetén.
Ha $x=1$, akkor $4=A\cdot 2+B\cdot 0 \quad\Longrightarrow\quad A=2.$
Ha $x=-1$, akkor $4=A\cdot 0+B\cdot(-2) \quad\Longrightarrow\quad B=-2.$
Ezért

$$(**)\qquad \frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}.$$

$(*)$ és $(**)$ alapján azt kapjuk, hogy ha $-1<x<1$, akkor

$$\int\frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx=\int\left(x+1+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+2\ln(1-x)-2\ln(x+1)+c=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^2+c.$$

d) Ez a feladat az elméleti összefoglalóban szereplő 4. alaptípushoz tartozik, azaz a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom, és az utóbbinak nincs valós gyöke (ui. a $2^2-4\cdot 3$ diszkriminánsa negatív). Azt tanultuk, hogy ilyenkor a számlalót érdemes felírni a nevező deriváltja és az 1 konstans lineáris kombinációjaként, azaz

$$x+3=\gamma(2x+2)+\delta \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ha $x=-1$, akkor $2=\gamma\cdot 0+\delta \quad\Longrightarrow\quad \delta=2.$
Ha $x=0$, akkor $3=\gamma\cdot 2+\delta \quad\Longrightarrow\quad 3=\gamma\cdot 2+2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma=1/2.$
Ezért

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx+2\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Az első integrál a 2. alaptípushoz tartozik

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx=\left(\frac{f'}{f}\text{ típus}\right)=\ln(x^2+2x+3)+c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A második integrál a 3. alaptípushoz tartozik. Itt az integrandust teljes négyzetté alakítással az $\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$ alapintegrálra vezetjük vissza. Ha $x\in\mathbb{R}$, akkor

$$\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c.$$

Összefoglalva

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

e) A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, és a nevező már nem bontható tovább valós együtthatós polinomok szorzatára. A parciális törtekre bontással és közös nevezőre hozással és átrendezéssel

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}.$$

Az együtthatók egyenlőségéből azt kapjuk, hogy $C = 0$, $A = 1/4$ és $A + B = 0$, azaz $B = -1/4$. Ezért, ha $x > 0$, akkor

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + c = \ln\sqrt[8]{\frac{x^2}{x^2+4}} + c.$$