9. gyakorlat

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 3.

Racionális törtfüggvények integrálására vonatkozó helyettesítések

Emlékeztető.

Tétel. **(A második helyettesítési szabály)** *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$, $\mathcal{R}_g = I$, $g \in D(J)$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$ J-n) és az $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

A második helyettesítési szabályt a következő módon szoktuk alkalmazni. Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált szeretnénk kiszámítani. Egy alkalmas, a szabály feltételeit teljesítő g függvénnyel a „régi" x változó helyett vezessük be az $x = g(t)$ egyenlőségből adódó $t = g^{-1}(x)$ „új" változót. Ezzel az x változót t-re helyettesítjük az f függvényben és ezt „megszorozzuk" $g'(t)\,dt$-vel. Az így kapott integrált kiszámítjuk (***ha tudjuk***) és utána a t változót x-re visszahelyettesítjük.

Több olyan integrandus-típus van, amelyeket alkalmas helyettesítésekkel racionális törtfüggvények integrálására vezethetünk vissza. Itt ezek közül csak kettőt ismertetünk.

1. típus: $\int R(e^x)\,dx$ alakú integrálok, ahol $R(u)$ egyváltozós racionális törtfüggvény.

Ebben az esetben a

$$\boxed{t = e^x}$$

helyettesítés lesz célravezető. Tegyük fel ugyanis, hogy $I \subset \mathbb{R}$ egy olyan nyílt intervallum, amelyben R nevezőjének nincs valós gyöke. Ekkor az integrandus folytonos, ezért van primitív függvénye. Tekintsük tehát a $t = e^x$ $(x \in I)$ helyettesítést, azaz legyen

$$x = \ln t =: g(t)$$

a helyettesítő függvény. Mivel $x \in I$, ezért $\mathcal{R}_g = I$, így $\mathcal{D}_g$ az I intervallum ln függvény által létesített őspképe:

$$\mathcal{D}_g = \ln^{-1}[I] =: J.$$

Ekkor $J \subset \mathbb{R}$ is egy nyílt intervallum, ami a konkrét feladatokban egyszerűen meghatározható (meg is kell határozni!). A g függvény deriválható J-n és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0, \quad \text{ha } t \in J,$$

ezért g szigorúan monoton növekvő J-n, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \qquad (x \in I).$$

A második helyettesítési szabály alapján

$$\int R \circ \exp = \int R(e^x)\,dx \underset{x=\ln t}{=} \int R(t) \cdot \frac{1}{t}\,dt \qquad (t \in J).$$

Világos, hogy $R(t)/t$ $(t \in J)$ is racionális törtfüggvény, ezért az integrálját az előző gyakorlaton tanult módszerekkel történhet.

2. típus: $\boldsymbol{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx}$ ***alakú integrálok***, ahol $R(u,v)$ kétváltozós racionális törtfüggvény. Ezen azt értjük, hogy $R(u,v)$ az u és v változókból, valamint konstansokból állítható elő a négy alapművelet segítségével. Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor áll, ha

$$R(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}u^i v^j}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij}u^i v^j}$$

ahol $n \geq 0$ egész és a_{ij}, b_{ij} adott valós számok.

A feladatokban mindig olyan I intervallumokat fogunk megadni, amelyeken az integrandus folytonos. Ekkor a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Legyen tehát

$$\boxed{t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

az „új” változó. A g helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből az egyenletből x-et kifejezzük:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \Longrightarrow \qquad ax+b = ct^n x + dt^n \qquad \Longrightarrow \qquad g(t) := x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}.$$

Itt $x \in I$, így $\mathcal{R}_g = I$. A g függvény értelmezési tartománya egy J nyílt intervallum. Konkrét esetekben ez egyszerűen meghatározható (meg is kell határozni!). Világos, hogy g deriválható és g' (egyváltozós) racionális törtfüggvény. Ellenőriznünk kell azt is, hogy g invertálható (az adott feladatokban ez mindig igaz lesz). A második helyettesítési szabály alapján

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\Big(g(t), t\Big) \cdot g'(t)\, dt \qquad (t \in J).$$

Az integrandus tehát (egyváltozós) racionális törtfüggvény. Ennek az integrálja az előző gyakorlaton tanult módszerekkel történhet.

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

$$a) \quad \int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad b) \quad \int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\, dx \quad \Big(x \in (0,+\infty)\Big).$$

Megoldás.

a) Alkalmazzuk a $t = e^x$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \ln t =: g(t).$$

Mivel $x \in \mathbb{R}$, ezért $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$, következésképpen $\mathcal{D}_g = (0,+\infty)$. A g függvény deriválható, és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0 \qquad \Big(t \in (0,+\infty)\Big)$$

alapján g szigorúan monoton növekvő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A második helyettesítési szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2}{t+2}\,dt = \int \frac{t^2-4+4}{t+2}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{(t+2)(t-2)}{t+2} + \frac{4}{t+2}\right) dt = \int (t-2)\,dt + 4\int \frac{1}{t+2}\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2) + c\Big|_{t=e^x} = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + c \quad (x\in\mathbb{R}).$$

b) Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$$

helyettesítést. Ebből az egyenletből x-et kifejezve azt kapjuk, hogy

$$t^3 = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad t^3 - 1 = \frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{t^3-1}.$$

Ha $x\in(0,+\infty)$, akkor $t\in(1,+\infty)$. A g helyettesítő függvény tehát

$$g(t) = \frac{1}{t^3-1} = x \qquad \big(t\in(1,+\infty)\big).$$

Mivel g deriválható és

$$g'(t) = -\frac{1}{\left(t^3-1\right)^2}\cdot 3t^2 < 0, \quad \text{ha } t>1,$$

ezért g szigorúan monoton csökkenő, következésképpen invertálható, és

$$g^{-1}(x) = t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} \qquad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

A második helyettesítési szabály alapján azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^3-1}\right)^2}\cdot t\cdot\left(\frac{-3t^2}{\left(t^3-1\right)^2}\right) dt = -3\int t^3\,dt =$$

$$= -\frac{3}{4}t^4 + c\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

Megjegyzés. A b) feladatot a következőképpen is megoldhatjuk:

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\,dx = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' dx = (f^{1/3}\cdot f' \text{ típus}) =$$

$$= -\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4/3}}{4/3} + c = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

A Newton–Leibniz-formula

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(Newton–Leibniz-formula)** *Tegyük fel, hogy*

- $f \in R[a,b]$ *és*
- *az* f *függvénynek van primitív függvénye az* $[a,b]$ *intervallumon.*

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F *az* f *függvény egy primitív függvénye.*

2. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx$$

határozott integrált!

Megoldás. Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. A $t = \sqrt[3]{x-2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$t = \sqrt[3]{x-2} \ \ (10 < x < 66) \quad \Longrightarrow \quad x = t^3 + 2 =: g(t) \ \ (2 < t < 4) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad g'(t) = 3t^2 > 0 \ \ (2 < t < 4) \quad \Longrightarrow \quad g \uparrow (2,4)\text{-en} \quad \Longrightarrow \quad \exists g^{-1}.$$

A második helyettesítési szabály alapján, ha $10 < x < 66$, akkor

$$\int \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx = \int \frac{1}{t^3 + 2 - t - 2} \cdot 3t^2\,dt = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2 - 1}\,dt = (f'/f \ \ \text{típus}) =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \ln\big(t^2 - 1\big) + c\Big|_{t=\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2} \cdot \ln\Big((x-2)^{2/3} - 1\Big) + c.$$

A Newton–Leibniz-formula alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \Big[\ln\Big((x-2)^{2/3} - 1\Big)\Big]_{10}^{66} =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \Big(\ln\big(64^{2/3} - 1\big) - \ln\big(8^{2/3} - 1\big)\Big) = \frac{3}{2} \cdot \big(\ln 15 - \ln 3\big) = \frac{3}{2} \cdot \ln 5.$$

A határozott integrál alkalmazásai

1. Síkidom területe

Emlékeztető. Két $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény esetében, ha $g(x) \le f(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor a függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel által közrezárt

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ a \le x \le b, \ g(x) \le y \le f(x)\big\}$$

síkidom területét a

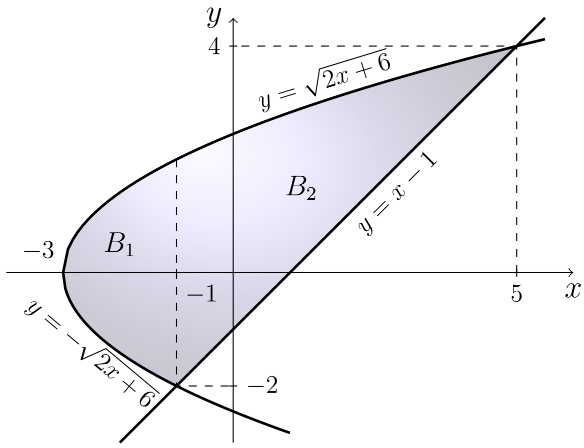
$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

határozott integrállal értelmezzük.

3. Feladat. *Számoljuk ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét!*

Megoldás. Készítsünk ábrát!

A két görbe által közrezárt síkidom meghatározásához először meg kell keresnünk a metszéspontjukat. Ehhez meg kell oldanunk az



$$\begin{aligned} y^2 &= 2x + 6 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez olyan x értékekre teljesül, amelyekre $(x-1)^2 = 2x+6$, azaz $x^2 - 4x - 5 = 0$. Ennek két megoldása van: $x = -1$ és $x = 5$.

Az $y^2 = 2x+6$ olyan parabolának egyenlete, amely szimmetriatengelye megegyezik az x tengellyel, és csúcsa a $(-3, 0)$ koordinátájú pontban van. A felső parabolaág egyenlete $y = \sqrt{2x+6}$, míg az alsó parabolaág egyenlete $y = -\sqrt{2x+6}$. Látható tehát, hogy a keresett síkidomot nem csak két függvény fogja meghatározni, ezért ezt darabolni fogjuk az alábbiak szerint

$$B_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3 \le x \le -1,\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6} \right\},$$
$$B_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 5,\ x - 1 \le y \le \sqrt{2x+6} \right\}.$$

Az előző két síkidom területét már ki tudjuk számítani integrálszámítással:

$$T(B_1) = \int_{-3}^{-1} \left(\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6}) \right) dx = 2 \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6}\, dx = 2 \int_{-3}^{-1} (2x+6)^{1/2}\, dx =$$

$$= 2 \left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2} \right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3} \left[\sqrt{(2x+6)^3} \right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3} \left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3} \right) = \frac{16}{3},$$

$$T(B_2) = \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - (x-1) \right) dx = \int_{-1}^{5} \left((2x+6)^{1/2} - x + 1 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{5} = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(2x+6)^3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{5} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sqrt{16^3} - \frac{25}{2} + 5 \right) - \left(\frac{1}{3} \sqrt{4^3} - \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{38}{3}.$$

Az előző két terület összege adja az egyenes és a parabola által közrezárt síkidom területét:

$$T(B_1) + T(B_2) = 18.$$

Megjegyzés. Az előző számítások jelentősen lerövidülnek, ha az x és y változók szerepét felcseréljük.

Fejezzük ki az x változót y-ből mindkét egyenletben. Az így kapott

$$x = y + 1, \qquad x = \frac{y^2}{2} - 3$$

egyenletrendszernek csak $y = -2$ és $y = 4$ esetén lesz megoldása. Ezzel a szóban forgó síkidomot két függvénnyel tudjuk meghatározni az alábbi szerint

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \le y \le 4,\ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y + 1 \right\}.$$

Így ennek területe

$$T(B) = \int_{-2}^{4} \left((y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right) dy = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy = \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{-2}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{6} + \frac{(-2)^2}{2} + 4 \cdot (-2) \right) = \frac{40}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = 18.$$

2. *Síkbeli görbe ívhossza*

Emlékeztető. **Tétel.** *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ és tegyük fel, hogy $f \in C^1[a, b]$. Ekkor az f függvény*

$$\Gamma_f := \left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in [a, b] \right\}$$

grafikonjának van ívhossza, és az egyenlő az alábbi határozott integrállal:

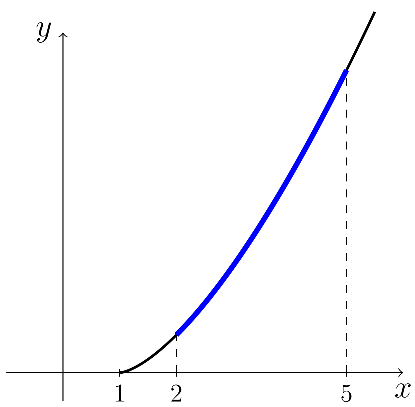
$$\ell(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

4. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \qquad (2 \le x \le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

Megoldás. A megadott f függvény grafikonja a következő ábrán látható.



Az $f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3}$ függvény differenciálható, és deriváltja

$$f'(x) := (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$$

folytonos a $[2, 5]$ intervallumon. Ezért létezik a keresett ívhossz, amelynek mértéke

$$\ell = \int_2^5 \sqrt{1 + [\sqrt{x-1}]^2}\, dx = \int_2^5 \sqrt{1 + x - 1}\, dx =$$

$$= \int_2^5 \sqrt{x}\, dx = \int_2^5 x^{1/2}\, dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_2^5 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_2^5 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3} \right) \approx 5,568.$$

3. Forgástest térfogata

Emlékeztető. Legyen $0 \le f \in R[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó

$$A_f := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\right\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

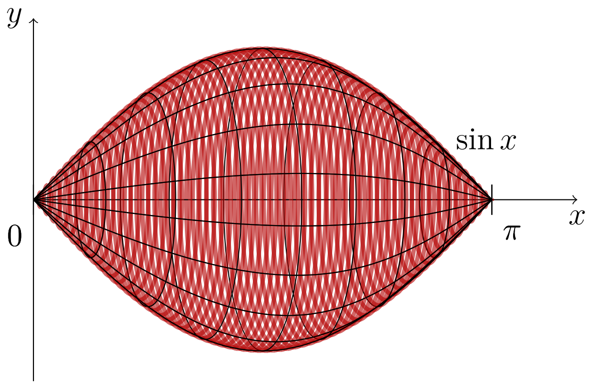
integrállal.

5. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x) := \sin x \qquad \big(x \in [0,\pi]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

Megoldás. Az ábrán látható forgástest térfogatát keressük.



Az $f(x) = \sin x$ függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható a $[0,\pi]$ intervallumom. Ekkor a forgástestnek van térfogata, amelynek mértéke

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$