11. gyakorlat

TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS 2.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények totális deriváltja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***totálisan deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$), ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^{1\times 2}\colon \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - A\cdot h|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény ***deriváltmátrixa*** az a pontban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ deriváltmátrix egyértelműen meghatározott.

Tétel. **(A deriváltmátrix előállítása)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy függvény és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists \partial_1 f(a)$, $\exists \partial_2 f(a)$ és*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

az ún. **Jacobi-mátrix**.

1. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

Megoldás. A deriválhatóság igazolása.

Legyen $a = (a_1, a_2) = (1,2)$ és $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sormátrix, amire:

$$\lim_{h\to \mathbf{0}} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\big|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező A mátrixot így lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \\ &= 2(1+h_1)^2 + 3(1+h_1)(2+h_2) - (2+h_2)^2 - \Big[2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2 - 2^2\Big] = \\ &= 10h_1 - h_2 + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2. \end{aligned}$$

Legyen $A := \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$. Az előző egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\left|f(a+h) - f(a) - A\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a jobb oldalon álló függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban 0-val egyenlő. Mivel

$$0 \le \frac{|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{2(h_1^2+h_2^2)+3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \Big(|h_1h_2| \le \tfrac{1}{2}(h_1^2+h_2^2) \text{ miatt}\Big) \le$$

$$\le \frac{2(h_1^2+h_2^2)+\frac{3}{2}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 4\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0 \qquad (\text{ha } h_1 \to 0 \text{ és } h_2 \to 0),$$

ezért a közrefogási elvből következik, hogy a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

egyenlőség valóban teljesül. A fentieket összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy $f \in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az $f'(1,2) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$ sormátrix.

Ellenőrzés. Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 4x+3y, \qquad & \partial_1 f(1,2) &= 10, \\ \partial_2 f(x,y) &= 3x-2y, \qquad & \partial_2 f(1,2) &= -1, \end{aligned}$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix},$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal.

2. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

a) *folytonos,*

b) *minden irány mentén deriválható,*

c) *totálisan nem deriválható!*

Megoldás.

a) A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$(**)$ $\quad \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \colon |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon.$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x| \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

$$= |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(**)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\{(0,0)\}$.

b) A $0=(0,0)$ origóból kiinduló irányokat az $v := \big(\cos\alpha, \sin\alpha\big)$ egységvektorokkal adjuk meg, ahol $\alpha \in [0, 2\pi)$. Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt igazolni, hogy a

$$F(t) := f(0+tv) = f(tv) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t\cos\alpha\cdot(t\sin\alpha)^2}{(t\cos\alpha)^2+(t\sin\alpha)^2} =$$

$$= (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2\cdot t \qquad (t\in\mathbb{R})$$

valós-valós függvény deriválható a $t=0$ pontban. Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így $\partial_v f(0,0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$.

c) Indirekt módon tegyük fel, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. A parciális deriváltak az

$$e_1 = (1,0) = (\cos 0, \sin 0) \qquad \text{és} \qquad e_2 = (0,1) = (\cos\pi/2, \sin\pi/2)$$

vektorok irányában vett iránymenti deriváltak. Ezért az előző pont szerint

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_{e_1} f(0,0) = (\cos 0)(\sin 0)^2 = 0,$$
$$\partial_2 f(0,0) = \partial_{e_2} f(0,0) = (\cos\pi/2)(\sin\pi/2)^2 = 0.$$

Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

és a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - \begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - 0\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1|h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Ez most sem lehetséges, mert az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel, ha

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

akkor $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, és ezekben a pontokban az értékek

$$\frac{|x_n|y_n^2}{(x_n^2+y_n^2)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right|\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{n^2}\right)^3}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{\sqrt{2^3}}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz. Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

Megjegyzés. A feladat elméleti szempontból is érdekes, mert egyrészt azt igazolja, hogy a pontbeli folytonosságból általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság. Másrészt pedig a pontbeli parciális deriváltak, vagy az iránymenti deriváltak létezéséből általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság.

Felület érintősíkja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ pontban *van érintősíkja*, ha $f \in D\big\{(x_0, y_0)\big\}$. ***Az érintősík egyenlete***:

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

amelynek egyik ***normálvektora***: $\vec{n}\big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big)$.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

a) *Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!*

b) *Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.*

Megoldás.

a) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $x^2 > 2y^2$, akkor a parciális deriváltak léteznek, és

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}},$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot (-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}.$$

b) Legyen $(x_0, y_0) = (3, 2)$. Az f függvény parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pont egy környezetében és folytonosak az (x_0, y_0) pontban, ezért f totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. A felület

$$(x_0, y_0, z_0) = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$$

pontjához tehát érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg. Mivel

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - 2y_0^2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2} = 1,$$

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = 3,$$

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{-2y_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{-4}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = -4,$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{3x - 4y - z = 0}}\,.$$

Ennek egy normálvektora:

$$\vec{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big) = \underline{\underline{(3, -4, -1)}}.$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékei

Emlékeztető. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban ***lokális maximuma van*** (vagy másképp fogalmazva az a pont az f függvénynek ***lokális maximumhelye***), ha van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy

$$\forall x \in K(a)\colon f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f függvény ***lokális maximumának*** nevezzük.

Analóg módon értelmezzük az ***lokális minimumhely*** és az ***lokális minimum*** fogalmát.

Tétel. **(Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Továbbá*

- *$f \in D\{a\}$ és*
- *az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$, azaz $f'(a) = \begin{pmatrix}\partial_1 f(a) & \partial_2 f(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

A tétel tehát azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak f stacionárius pontjaiban (vagyis olyan a pontokban, f differenciálható és $\partial_1 f(a) = 0$, $\partial_2 f(a) = 0$) lehetnek.

Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha rögzített $i = 1, 2$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvénynek létezik a j-edik ($j = 1, 2$) változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, akkor a $\partial_{ij} f(a) := \partial_i \partial_j f(a) := \partial_j\big(\partial_i f\big)(a)$ számot (mint $\partial_i f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a-beli j-edik változó szerinti parciális deriváltját) a függvény a-beli ij-edik ***másodrendű parciális deriváltjának*** nevezzük.

Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) függvény ***kétszer deriválható*** (vagy ***differenciálható***) az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D^2\{a\}$), ha

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D\{x\}$ minden $x \in K(a)$ pontban, illetve

b) $\partial_1 f \in D\{a\}$, és $\partial_2 f \in D\{a\}$.

Ha az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, akkor

$$f''(a) := \begin{pmatrix}\partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a)\\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a)\end{pmatrix}$$

az f függvény a pontbeli Hesse-féle mátrixa.

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***kétszer folytonosan deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $\boldsymbol{f \in C^2\{a\}}$), ha

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy $f \in D^2\big(K(a)\big)$ és

b) minden másodedrendű $\partial_{ij} f$ $\big(1 \le i, j \le 2\big)$ parciális deriváltfüggvény folytonos az a pontban.

Tétel. **(Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in C^2\{a\}$. Tegyük fel, hogy*

$$\partial_1 f(a) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(a) = 0.$$

Jelölje

$$D(a) := det f''(a) = \det \begin{pmatrix}\partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a)\\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a)\end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. *ha $D(a) > 0$ és $\partial_{11} f(a) > 0$ [illetve $\partial_{11} f(a) < 0$], akkor az f függvénynek a-ban lokális minimuma [illetve maximuma] van.*
2. *ha $D(a) < 0$, akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke (ezt nevezzük nyeregpontnak)*
3. *ha $D(a) = 0$, akkor így nem tudjuk megállapítani, hogy az a pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem. Ilyenkor csak egyedi vizsgálatokkal tudjuk a kérdést eldönteni.*

4. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-őn, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2 - 6x + 2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 2x + 2y & = & 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad y = -x \quad\Longrightarrow\quad 3x^2 - 6x - 2x = 0.$$

Ebből

$$3x^2 - 8x = x(3x-8) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = \frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2\Big(\tfrac{8}{3}, -\tfrac{8}{3}\Big).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6x - 6, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 2 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2.$$

Ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = 6x - 6, \quad D_2 = \det f''(x,y) = 12x - 16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = -16 < 0$. Az $f''(0,0)$ mátrix indefinit, ezért a $P_1(0,0)$ pontban az f függvénynek *nincs lokális szélsőértéke.*

A $P_2(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $f''\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 16 > 0$, $D_1 = 10 > 0$. Az $f''\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big)$ *lokális minimumhely.*

5. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-őn, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rclcl} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3-2x-2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3-2x-2y & = & 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad x^3=y^3 \quad\Longrightarrow\quad x=y.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0,\quad x=1 \;\text{ vagy }\; x=-1.$$

Az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0),\quad P_2(1,1),\quad P_3(-1,-1).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban:

$$\begin{array}{ll} \partial_{xx} f(x,y)=12x^2-2, & \partial_{xy} f(x,y)=-2, \\ \partial_{yx} f(x,y)=-2, & \partial_{yy} f(x,y)=12y^2-2, \end{array}$$

ezért

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{pmatrix},$$

$$D_1=12x^2-2,\quad D_2=\det f''(x,y).$$

A $P_2(1,1)$ pontban $f''(1,1)=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$, $D_2=10^2-4>0$, $D_1=10>0$. Az $f''(1,1)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2(1,1)$ *lokális minimumhely*.

A $P_3(-1,-1)$ pontban $f''(-1,-1)=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}=f''(1,1)$, ezért az f függvénynek a $P_3(-1,-1)$ pont is *lokális minimumhelye*.

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ és $\det f''(0,0)=0$. Ebben a pontban a másodrendű elégséges feltétel *nem alkalmazható*.

Egyedi vizsgálattal tudjuk csak eldönteni, hogy a $P_1(0,0)$ pont vajon lokális szélsőértékhelye. Mivel $f(0,0)=0$, ezért f-nek a P_1 pontban pontosan akkor van lokális szélsőértéke, ha f az origó egy környezetében azonos előjelű. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y):=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2=x^4+y^4-(x+y)^2 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

és tekintsük f értékeit először az $y=-x$ egyenes mentén: $f(x,y)=f(x,-x)=2x^4$, ami pozitív minden $x\neq 0$ valós számra. Nézzük most a függvény értékeit az $y=0$ egyenes (vagyis az x-tengely) mentén: $f(x,0)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$; ez pedig negatív, ha $|x|<1$ és $x\neq 0$. Az f függvény tehát az origó tetszőleges kicsi környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, ezért ebben a pontban nincs lokális szélsőértéke.