12. gyakorlat

TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK

Szukcesszív integrálás

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(Fubini-tétel)** *Legyen $I = [a, b] \times [c, d]$ és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) $f \in R(I)$,

b) $\forall x \in [a, b]\colon f_x \in R[c, d]$,

c) $\forall y \in [c, d]\colon f^y \in R[a, b]$.

Ekkor

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

A tétel teljesülése esetén egy kétváltozós függvény integrálját kiszámíthatjuk úgy is, hogy az egyik változót először (tetszőlegesen) rögzítjük, és a másik változó szerint integrálunk, majd az így kapott (a rögzített változótól függő) integrált integráljuk. (Innen ered a *szukcesszív* (egymás utáni) jelző.) Az integrálást bármelyik változóval kezdhetjük, tehát az ***integrálás sorrendje felcserélhető***.

Ha az f függvény ***folytonos*** az I téglalapon, akkor $f \in R(I)$, illetve az f_x $(x \in [a, b])$ és az f^y $(y \in [c, d])$ szekciófüggvények is folytonosak, következésképpen Riemann-integrálhatóak. Így a tétel feltételei teljesülnek.

1. Feladat. *Tekintsük az $I := [0, 1] \times [0, 2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az*

$$\iint\limits_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

Megoldás. Az integrandus folytonos az $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ halmazon (tehát I-n is), ezért az integrál létezik.

Ha először tetszőlegesen rögzített $x \in [0, 1]$ változó mellett az y változó szerint integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\iint\limits_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x^3 \sqrt{y}\, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[x^3 \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int\limits_0^1 \left(x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - 0 \right) dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int\limits_0^1 x^3\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ha először tetszőlegesen rögzített $y \in [0,2]$ változó mellett az x változó szerint integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\iint\limits_I x^3\sqrt{y}\,dx\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^1 x^3\sqrt{y}\,dx\right) dy = \int\limits_0^2 \left[\frac{x^4}{4}\cdot\sqrt{y}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}\sqrt{y} - 0\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 y^{1/2}\,dy = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

A különböző sorrendben számolt integrálok tehát valóban megegyeznek.

Megjegyzés. Ha az integrandusban szereplő x és y változó szétválasztható az

$$f(x,y) := g(x)h(y) \qquad (a \le x \le b,\ c \le y \le d)$$

módon, ahol $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor a Fubini-tétel feltételei nyilvánvalóan teljesülnek, és

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d g(x)h(y)\,dy\right) dx = \int\limits_a^b g(x)\left(\int\limits_c^d h(y)\,dy\right) dx = \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_c^d h(y)\,dy\right)$$

teljesül, azaz a kettős integrál felbontható két valós integrál szorzatára. Eszerint

$$\iint\limits_I x^3\sqrt{y}\,dx\,dy = \left(\int\limits_0^1 x^3\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^2 \sqrt{y}\,dy\right) = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2^{3/2}}{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2. Feladat. *Számítsuk ki a következő kettős integrált!*

$$\iint\limits_I x\cdot\sin(xy)\,dx\,dy \qquad \left(I := \left[1,3\right]\times\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\right).$$

Megoldás. Az integrálandó $f(x,y) := x\cdot\sin(xy)$ $\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$ függvény folytonos I-n, ezért $f \in R(I)$. A Fubini-tétele alapján mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz.

Ha először az $x \in [1,3]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az y változó szerint integrálunk, akkor az

$$(*) \qquad \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\sin(xy)\,dy\right) dx$$

egyváltozós integrálokat kell egymás után kiszámolni.

Ha először az $y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az x változó szerint integrálunk, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$(**) \qquad \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_1^3 x\cdot\sin(xy)\,dx\right) dy.$$

Vegyük észre azonban azt, hogy a $(**)$ esetben először parciálisan kell integrálni, a $(*)$ esetben pedig a belső integrált rögtön kiszámíthatjuk. Ezért a $(*)$ alatti sorrendben integrálunk:

$$\iint_I x\cdot\sin(xy)\,dx\,dy = \int_1^3\left(\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin(xy)\,dy\right)dx = \int_1^3\Big[-\cos(xy)\Big]_{y=0}^{y=\pi/2}\,dx =$$

$$= \int_1^3\Big(-\cos\frac{\pi x}{2}+\cos 0\Big)\,dx = \int_1^3\Big(-\cos\frac{\pi x}{2}+1\Big)\,dx = \left[-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}}+x\right]_1^3 =$$

$$= \Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{3\pi}{2}+3\Big)-\Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}+1\Big) = 2+\frac{4}{\pi}.$$

Megjegyzés. A szukcesszív integrálás tétele azt állítja, hogy (a tétel feltételeinek a teljesülése esetén) mindegy, hogy melyik sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kétféle sorrendben történő kiszámolás során ugyanolyan technikai jellegű nehézségek lépnek fel.

Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Emlékeztető. Az integrálhatóság fogalma egyszerűen kiterjeszthető *tetszőleges* korlátos $H\subset\mathbb{R}^2$-beli halmazokon értelmezett *korlátos* függvényekre. Legyen H egy ilyen halmaz és $f:H\to\mathbb{R}$ egy adott korlátos függvény. Ekkor van olyan kétdimenziós I intervallum, amelyre $H\subset I$. Terjesszük ki az f függvény értelmezését az I intervallumra a következőképpen:

$$\tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in H)\\ 0, & (x\in I\setminus H).\end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az $f:H\to\mathbb{R}$ függvény ***(Riemann)-integrálható a H halmazon*** (jelben $f\in R(H)$), ha az $\tilde f: I\to\mathbb{R}$ függvény integrálható az I intervallumon. Ekkor legyen

$$\iint_H f := \iint_I \tilde f.$$

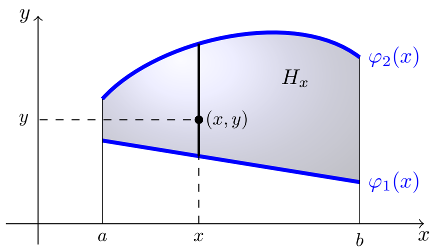
Egyszerűen belátható, hogy ez az értelmezés *független* a H-t tartalmazó intervallum megválasztásától.

Gyakran előfordul, hogy két függvény által határolt tartományon kell egy integrált kiszámítani.

Legyenek $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ minden $x\in[a,b]$ esetén. A

$$H_x := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\right\}$$

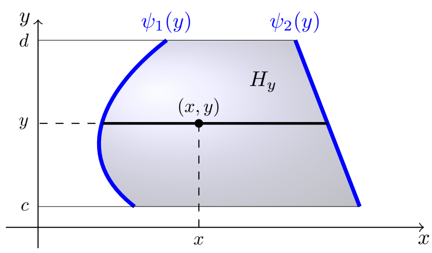
halmazt a x *tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Legyenek $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ minden $y\in[c,d]$ esetén. A

$$H_y := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\right\}$$

halmazt a y *tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Tétel. **(Integrálás H_x normáltartományon)** *Legyen H_x az x tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_x \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_x)$ és*

$$\iint\limits_{H_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Tétel. **(Integrálás H_y normáltartományon)** *Legyen H_y az y tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_y \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_y)$ és*

$$\iint\limits_{H_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

3. Feladat. *Számítsuk ki a következő kettős integrált:*

$$\iint\limits_{H} (2xy - x^3)\,dx\,dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész!

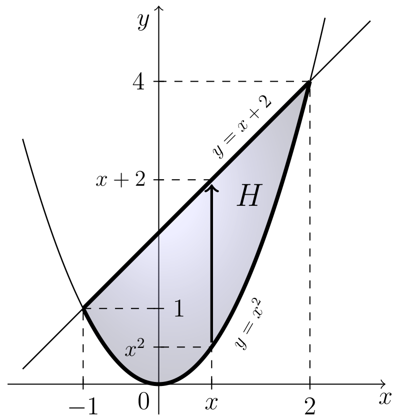
Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!

Először meghatározzuk a görbék metszéspontjait:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \iff x^2 = x+2 \iff (x+1)(x-2) = 0,$$

Azaz $x = -1$ és $x = 2$ értékeknél találjuk a két metszéspontot. Azt látjuk, hogy a H halmaz az x tengelyre nézve normáltartomány, és

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x + 2\right\}.$$



Az $f(x,y) = 2xy - x^3$ integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a korlátos H halmazon is. Következésképpen $f \in R(H)$. Ekkor először y szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső” integrál irányát.) Így

$$\iint\limits_{H} (2xy - x^3)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(\int\limits_{x^2}^{x+2} (2xy - x^3)\,dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{2} \Big[xy^2 - x^3 y \Big]_{y=x^2}^{y=x+2} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \Big(\big(x(x+2)^2 - x^3(x+2) \big) - \big(x(x^2)^2 - x^3x^2 \big) \Big)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \big(4x^2 + 4x - x^4 - x^3 \big)\,dx =$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{2} = \left(\frac{32}{3} + 8 - \frac{32}{5} - 4 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{153}{20}.$$

Megjegyzés. A H halmaz felbontható két

$$H_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\right\},$$
$$H_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le y \le 4,\ y-2 \le x \le \sqrt{y}\right\}$$

y tengelyre nézve normáltartomány uniójaként. Ekkor

$$\iint_H (2xy - x^3)\, dx\, dy = \iint_{H_1} (2xy - x^3)\, dx\, dy + \iint_{H_2} (2xy - x^3)\, dx\, dy =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2xy - x^3)\, dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} (2xy - x^3)\, dx \right) dy.$$

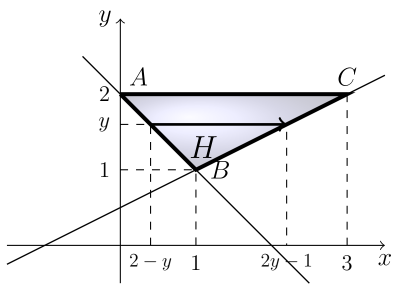
Azonban ez így jóval több számítással jár.

4. Feladat. *Jelölje H a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglapot. Számítsuk ki az*

$$\iint_H y\, e^x\, dx\, dy$$

integrált!

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Ha a tartományra az x tengelyre nézve normáltartományként tekintünk, akkor az integrál kiszámítását két részre kell bontani a $[0,1]$ és az $[1,3]$ intervallumokkal. Azonban, ha a tartományra az y tengelyre nézve normáltartományként tekintünk, akkor nem szükséges két részre bontani a H tartományt.

A H tartomány meghatározásához fel kell írni az AB és a BC egyenes egyenletét.

- Az AB egyenes esetén:

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{1-2}{1-0} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -x+2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -y+2.$$

- Az BC egyenes esetén:

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2y-1.$$

Így

$$H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le y \le 2,\ -y+2 \le x \le 2y-1\right\}.$$

Az

$$f(x,y) := y\, e^x$$

integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-ön, tehát a korlátos H halmazon is. Ennek következtében $f \in R(H)$.

Először x szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső” integrál irányát.) Ezért

$$\iint_H ye^x\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{-y+2}^{2y-1} ye^x\,dx \right) dy = \int_1^2 y \cdot \Big[e^x\Big]_{x=-y+2}^{x=2y-1} dy = \int_1^2 y \cdot \Big(e^{2y-1} - e^{-y+2}\Big) dy =$$

$$= e^{-1} \int_1^2 y \cdot e^{2y}\,dy - e^2 \int_1^2 y \cdot e^{-y}\,dy.$$

A kapott két integrált parciális integrálási szabállyal fogjuk kiszámolni:

$$\int_1^2 y \cdot e^{2y}\,dy = \left[y \cdot \frac{e^{2y}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{e^{2y}}{2}\,dy = \frac{1}{2}\Big(2e^4 - e^2\Big) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(e^4 - \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\Big(e^4 - e^2\Big) = \frac{e^2}{4}\Big(3e^2 - 1\Big)$$

és

$$\int_1^2 y \cdot e^{-y}\,dy = \left[y \cdot \frac{e^{-y}}{-1}\right]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{e^{-y}}{-1}\,dy = (-1) \cdot \Big(2e^{-2} - e^{-1}\Big) + \left[\frac{e^{-y}}{-1}\right]_1^2 =$$

$$= \Big(-2e^{-2} + e^{-1}\Big) - \Big(e^{-2} - e^{-1}\Big) = \frac{2e-3}{e^2}.$$

Ezért

$$\iint_H ye^x\,dx\,dy = \frac{3}{4}e^3 - \frac{9}{4}e + 3.$$

5. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x,y) := e^x\Big(\sqrt{x} + y\Big) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény integrálját az $x = 1$ és $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt korlátos és zárt síktartományon!

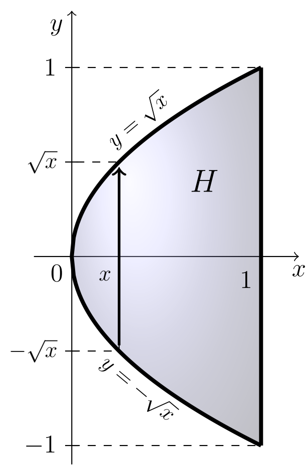
Megoldás.

A függvény képletéből látjuk, hogy ha az x változó szerint kezdünk integrálni, akkor komoly nehézségekkel kerülünk szembe. Ezért a feladatban szereplő halmazt az x tengelyre nézve normáltartományként fogjuk tekinteni. Ezt fogjuk H-val jelölni.

Ábrázoljuk a H halmazt! Azt látjuk, hogy

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\Big\}$$

az x tengelyre nézve normáltartomány. Az f függvény folytonos, és így $f \in R(H)$. Először x szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső” integrál irányát.)



Ezért

$$\iint\limits_H e^x\left(\sqrt{x}+y\right)dx\,dy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^x\left(\sqrt{x}+y\right)dy\right)dx=\int\limits_0^1 e^x\left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+y\right)dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 e^x\left[\sqrt{x}y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1 e^x\left(\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)-\left(-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 e^x\cdot 2x\,dx=2\int_0^1 x(e^x)'\,dx=2\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx\right)=2\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)=$$

$$=2\big(e-(e-1)\big)=2.$$