(Hf) 1. Érintő: $f(x) = \cos \frac{x-1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ $a = \frac{1}{2}$.

Az érintő egyenlete: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$, $f(a) = f(\frac{1}{2}) = \cos\left(\frac{-1/2}{5/4}\right) = \underline{\underline{\cos \frac{2}{5}}}$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' = -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{1\cdot(x^2+1) - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(a) = f'(1/2) = -\sin\left(\frac{-1/2}{5/4}\right) \cdot \frac{-1/4+1+1}{(5/4)^2} = \underline{\underline{\frac{28}{25} \sin \frac{2}{5}}}$$

$$\boxed{y = \frac{28}{25} \sin \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \cos \frac{2}{5}}$$

2. Igazolja, hogy f invertálható és f^{-1} differenciálható $(-\pi, \pi)$-n.

$$(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{2}) = ?$$

$$f(x) = x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Megoldás.

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ és $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$

Ezért $f'(x) > 0$ ha $-\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow f \uparrow (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$

$\Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$-n. (mert f folytonos)

Így f invertálható $\mathbb{R}$-n, f folytonos, $f' > 0$ $(-\pi, \pi)$-n.

$\Rightarrow f^{-1}$ differenciálható $(-\pi, \pi)$-n.

! $a = \frac{\pi}{2}$. Ekkor $f(a) = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1 = b$, illetve

$f'(a) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} = 1$. Ezért

$$(f^{-1}(b))' = \frac{1}{f'(a)} = \underline{\underline{1}}.$$

3, $a, b = ?$, hogy $f \in D(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - ax + b\cos(x+1), & x < -1 \\ \dfrac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b} & x \geq -1 \end{cases}$$

Megoldás. Legyen

$b(x) = ax^2 - ax + b\cos(x+1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $j(x) = \dfrac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b}$ $(x \in \mathbb{R})$

A deriválási szabályok szerint $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$b'(x) = 2ax - a - b\sin(x+1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $j'(x) = 2a \cdot \dfrac{-1}{(x^2+1)^2} 2x + b\,e^{bx+b}$ $(x \in \mathbb{R})$

Ezért csak az $x = -1$ pontban nem biztos, hogy f differenciálható.

- I $b, j \in C\{-1\}$ $\quad b(-1) = a(-1)^2 - a(-1) + b\cos 0 = 2a + b = A$

  $j(-1) = \dfrac{2a}{(-1)^2+1} + e^0 = a + 1$,

  azaz $2a + b = a + 1 \Rightarrow \underline{a + b = 1}$

- II. $b, j \in D\{-1\}$ $\quad b'(-1) = 2a(-1) - a - b \cdot \sin 0 = -3a$

  $j'(-1) = \dfrac{-4a(-1)}{((-1)^2+1)^2} + be^0 = a + b$,

  azaz $a + b = -3a \Rightarrow 4a + b = 0$

  Megoldás: $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{4}{3}$.

4. Igazolja, hogy $f(x) = x^7 + 14x - 3$ fv-nek egyetlen zh-e van!

Megoldás. $f \in C(\mathbb{R})$ $a = 0$, $b = 1 \Rightarrow f(0) < 0$ és $f(1) > 0$

Így a Bolzano-tétel szerint van zérushelye a $(0,1)$-n.

$f \in D(\mathbb{R})$, $f'(x) = 7x^6 + 14 > 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Ezért a Rolle-tétel szerint nem lehet még egy zérushelye.