(Hf) 1. Monotonitás:

a) $f(x) = x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$$f'(x) = \left(x - 3x^{-1} + 2x^{-2}\right)' = 1 + 3x^{-2} - 4x^{-3} = 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x^3} = 0 \iff x = 1,$$

hiszen $x^3 + 0x^2 + 3x - 4 : \frac{x-1}{x^2+x+4}$ és $x^2+x+4 > 0$ mert $D = 1 - 4\cdot 1\cdot 4 < 0$

$$\begin{array}{l} x^3 + 0x^2 + 3x - 4 \\ -\underline{(x^3 - x^2)} \\ \quad x^2 + 3x \\ \quad -\underline{(x^2 - x)} \\ \qquad 4x - 4 \\ \qquad \underline{4x - 4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
f'	$+$		$-$	0	$+$
f	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad (x \neq 0)$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \iff x = 1$$

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
f'	$-$		$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

---

2. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+x+1) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

a) Lokális szélsőértékek

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

Az eredmények a táblázatban:

	$x<-1$	-1	$-1<x<1$	1	$x>1$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	$1/3$	$\downarrow$
lok.		min		max	

b) Abszolút szélsőértékek $[-2, 0]$-n.

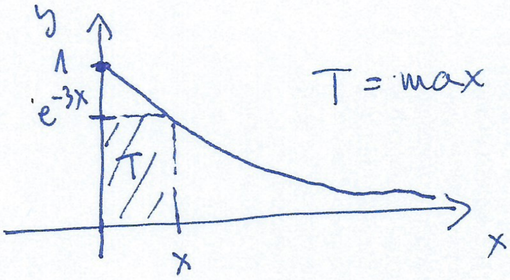
A lokális szélsőértékek: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, de csak $x_1 \in [-2, 0]$

Három pontot kell vizsgálni: $-2, -1, 0$.

$f(-2) = -2/3$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

- Absz. maximumhely $x = 0$, és absz. maximum: 0.
- Absz. minimumhely $x = -1$, és absz. minimum: -1.

3. $f(x) = e^{-3x} \quad (x>0)$



$T = \max$?

$$T(x) = x e^{-3x} \quad (x>0) \quad , T \in D^2(0,+\infty) \text{ és}$$

$$T'(x) = 1 \cdot e^{-3x} + x \cdot e^{-3x}(-3) = (1-3x)e^{-3x} \quad (x>0)$$

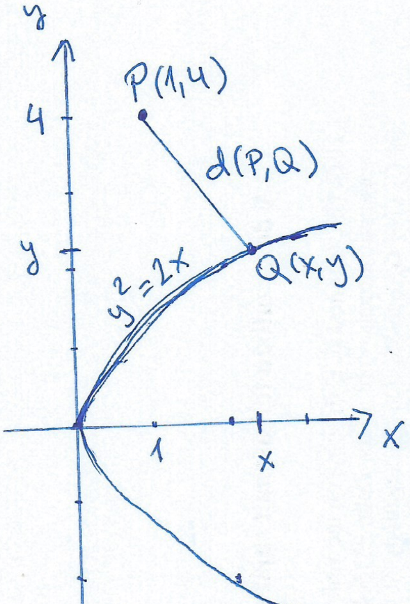
$$T''(x) = -3e^{-3x} + (1-3x)e^{-3x}(-3) = (9x-6)e^{-3x}$$

Ekkor $T'(x) = 0 \iff (1-3x) = 0 \iff x = 1/3$ (egyetlen megoldás)

$T''(1/3) = (3-6)e^{-1} < 0$ abszolút maximum.

Tehát $\underline{x = \frac{1}{3}}$ esetén kapjuk a maximális területű téglalapot.

---

4. 

Ha $Q(x,y)$ rajta van a parabolán, akkor
$$y^2 = 2x \quad (x>0,\ y \in \mathbb{R}),$$

és
$$d(P,Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2 + (y-4)^2}.$$

Ezért az
$$f(y) = \left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2 + (y-4)^2 \quad (y \in \mathbb{R})$$
függvény abszolút minimumát keressük.

$$f(y) = \frac{y^4}{4} - y^2 + 1 + y^2 - 8y + 16 = \frac{y^4}{4} - 8y + 17.$$

$f'(y) = y^3 - 8 = 0 \iff y = 2$. (egyetlen megoldás)

$f''(y) = 3y^2 \Rightarrow f''(2) = 12 > 0$ lok. min., ami abszolút min. is.

Eredmény: $y = 2 \Rightarrow x = \frac{2^2}{2} = 2$.

Tehát $Q(2,2)$ az $y^2 = 2x$ parabolának azon pontja, amely a legközelebb áll a $P(1,4)$ ponthoz.