(Hf) 1. Határozza meg az $f(x,y)=x^3+y^3-9xy \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 5,\ 0\le y\le 2x\}$ halmazon!

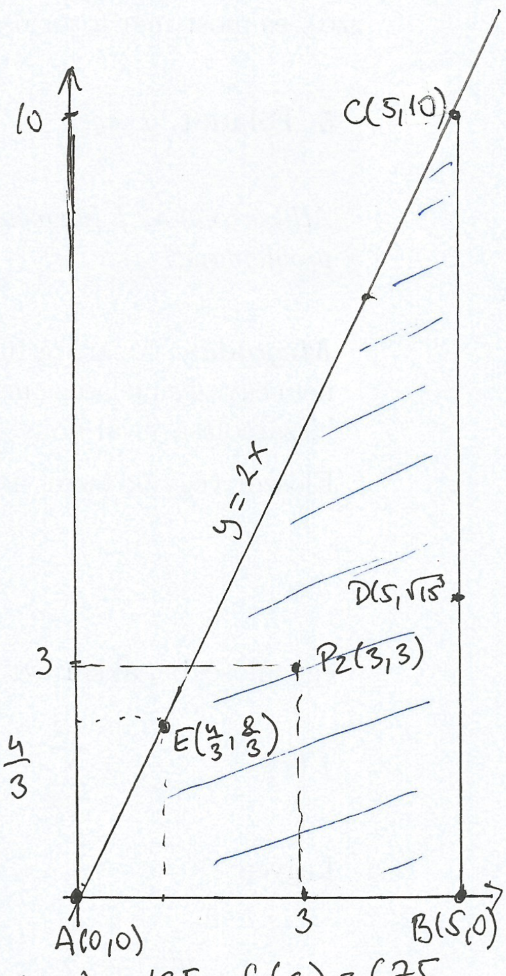
Megoldás. A H halmaz az ábrán látható, az $A(0,0)$, $B(5,0)$ és $C(5,10)$ csúcspontú korlátos és zárt háromszöglap. f folytonos H-n, ezért a Weierstrass-tétel szerint felveszi a maximumot és a minimumot H-n. Ezek a halmaz belsejében lehetnek (stacionárius pontok) vagy a halmaz határán.

Stacionárius pontok $\quad f\in D(\mathbb{R}^2)$ és

$$\left.\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= 3x^2-9y=0\\ \partial_2 f(x,y) &= 3y^2-9x=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow y=\frac{3x^2}{9}=\frac{x^2}{3} \Rightarrow 3\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)^2-9x=0$$

Ebből $\frac{x^4}{3}-9x=0 \Rightarrow \frac{x^4-27x}{3}=0 \Rightarrow x(x^3-27)=0 \Rightarrow x=0$ v. $x=3$.

Mivel $y=\frac{x^2}{3}$, így a stac. pontok $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, de csak P_2 van a halmaz belsejében.



A halmaz határán

AB szakasz: $y=0 \quad (0\le x\le 5)$

$g_1(x)=f(x,0)=x^3$, $g_1\uparrow$, absz. széls. $\underset{A}{x=0}$, $\underset{B}{x=5}$

BC szakasz: $x=5 \quad (0\le y\le 10)$

$g_2(y)=f(5,y)=125+y^3-45y$

$g_2'(y)=3y^2-45=0 \Rightarrow y=\sqrt{15}$

lehetséges absz. széls. $\underset{B}{y=0}$, $\underset{D(5,\sqrt{15})}{y=\sqrt{15}}$, $\underset{C}{y=10}$

AC szakasz $\quad y=2x \quad (0\le x\le 5)$

$g_3(x)=x^3+(2x)^3-9x(2x)=9x^3-18x^2$

$g_3'(x)=27x^2-36x=x(27x-36)=0 \Rightarrow x=0$ v. $x=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$

lehetséges absz. széls. $\underset{A}{x=0}$, $\underset{E\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)}{x=\frac{4}{3}}$, $\underset{C}{x=5}$

P_2 absz. minimumhely: $\min=-27$

C absz. maximumhely: $\max=675$. $\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} f(A)=0,\ f(B)=125,\ \underline{f(C)=675} \\ f(D)=125-30\sqrt{15}\approx 8{,}81 \\ f(E)=-\frac{32}{3},\ \underline{f(P_2)=-27}\end{array}\right.$

(Hf) 2. Legyen $f(x,y) = xy$ és $g(x,y) = x+y-1$. $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
Határozza meg f feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g=0$ feltétel mellett!

Megoldás: A Lagrange-szorzó módszer feltételei teljesülnek, mert
$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és $g'(x,y) = (\partial_1 g(x,y) \;\; \partial_2 g(x,y)) = (1 \;\; 1) \neq (0 \;\; 0)$.

A Lagrange függvény:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x+y-1).$$

Ekkor a lehetséges feltételes szélsőértékhelyek:

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 L(x,y) &= y+\lambda &= 0 \\ \partial_2 L(x,y) &= x+\lambda &= 0 \\ g(x,y) &= x+y-1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & y=-\lambda \text{ és } x=-\lambda \\ & -\lambda-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$; $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$.

Másrészt: $\partial_1 g(x,y) = 1$, $\partial_2 g(x,y) = 1$,
$\partial_{11} L(x,y) = 0$, $\partial_{12} L(x,y) = 1 = \partial_{21} L(x,y)$, $\partial_{22} L(x,y) = 0$.

Ezért

$$D(x,y;\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11} L(x,y) & \partial_{12} L(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21} L(x,y) & \partial_{22} L(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1+1 = 2,$$

így $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}) = 2 > 0$.

Ez azt jelenti, hogy f feltételes lokális maximuma van a $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban, és ennek értéke $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.