1. Adja meg a totális derivált fogalmát!

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény* **totálisan deriválható** *az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben:* $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$*), ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}: \lim_{h \to 0} \frac{\left\| f(a+h) - f(a) - A \cdot h \right\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény **deriváltmátrixa** *az a pontban.*

2. Milyen kapcsolat van a totális és az iránymenti derivált között?

Megjegyzés. A parciális és az iránymenti deriváltak kapcsolata a következő: Ha egy adott pontban egy függvénynek minden iránymenti deriváltja létezik, akkor minden parciális deriváltja is létezik, hiszen ezek speciális iránymenti deriváltak. Az állítás nem fordítható meg.

3. Mit állít a deriváltmátrix el®állításáról szóló tétel?

6. Tétel (A deriváltmátrix előállítása). *Legyen $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$, ahol $f_j \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ az f függvény j-edik, koordinátafüggvénye. Ha $f \in D\{a\}$, akkor*

$$\exists\, \partial_i f_j(a) \quad (\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, m), \qquad \text{és}$$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

az ún. **Jacobi-mátrix**.

4. Milyen feltételek mellett következik a parciális deriválhatóságról a totális deriválthatóság?

7. Tétel (Elégséges feltétel a totális deriválhatóságra). *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy az a pontnak van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezete, amire minden $i = 1, 2, \ldots, n$ index esetén a következők teljesülnek:*

a) *$\exists\, \partial_i f(x)$ minden $x \in K(a)$ pontban,*

b) *a $\partial_i f : K(a) \to \mathbb{R}$ parciális deriváltfüggvény folytonos az a pontban.*

Ekkor az f függvény totálisan deriválható az a pontban.

5. Adja meg az érint®sík fogalmát!

4. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény grafikonjának az* $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ *pontban van érintősíkja, ha* $f \in D\big\{(x_0, y_0)\big\}$. **Az érintősík egyenlete***:*

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0),$$

amelynek egyik **normálvektora***:* $\vec{n}\big(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1\big)$.

6. Mikor mondjuk, hogy egy f ∈ R → R függvény kétszer deriválható egy pontban?

2. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *függvény* **kétszer deriválható** (*vagy* **differenciálható**) *az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban (jelben:* $f \in D^2\{a\}$*), ha*

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, *hogy* $f \in D\{x\}$ *minden* $x \in K(a)$ *pontban, és*

b) $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ *indexre* $\partial_i f \in D\{a\}$.

7. Fogalmazza meg a Young-tételt!

1. Tétel (Young-tétel). *Ha* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ *és* $f \in D^2\{a\}$, *akkor*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad \textit{indexre.}$$

8. Mit ért azon, hogy az f ∈ Rn → R függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *függvénynek az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* **lokális maximuma van** (*vagy másképp fogalmazva az* a *pont az* f *függvénynek* **lokális maximumhelye**)*, ha van olyan* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezet, hogy*

$$\forall x \in K(a)\colon f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ *függvényértéket az* f *függvény* **lokális maximumának** *nevezzük.*

9. Hogyan szól a lokális széls®értékre vonatkozó els®rend¶ szükséges feltétel többváltozós függvények esetén?

3. Tétel (Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Továbbá*

- $f \in D\{a\}$ *és*
- *az* f *függvénynek az* a *pontban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$, *azaz* $\quad f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) & \dots & \partial_n f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

10. Hogyan szól a lokális széls®értékre vonatkozó másodrend¶ elégséges feltétel többváltozós függvények esetén?

4. Tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $f \in C^2\{a\}$. *Tegyük fel, hogy*

- $f'(a) = 0$,
- *az* $f''(a)$ *Hesse-féle mátrix pozitív (negatív) definit.*

Ekkor az f *függvénynek az* a *pontban lokális minimuma (maximuma) van.*