1. Mit ért azon, hogy az f ∈ R → R függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?

4. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **lokális maximuma van**, *ha*

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f, \ \forall x \in K(a) \colon f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az a pontot ***f*** **lokális maximumhelyének** *nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény* **lokális maximuma**.

2. Mi a kapcsolat az abszolút széls®értékhely és a lokális széls®értékhely fogalmai között?

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn.

- Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az $f(x) = x$ $(x \in [0,1])$ függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van, és A tartalmazza az a pont egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.
- Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket. ■

3. Hogyan szól a lokális széls®értékre vonatkozó els®rend¶ szükséges feltétel?

2. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és*

- $f \in D\{a\}$ *valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$*-ben,*
- f*-nek* a*-ban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$.

4. Minden f ∈ R → R függvény stacionárius pontja egyben lokális széls®értéke is? Válaszát indokolja!

5. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* **stacionárius pontja**, *ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.*

5. Milyen elégséges feltételeket ismer dierenciálható függvény szigorú monotonitásaival kapcsolatban

2. $f' > 0$ [*illetve* $f' < 0$] (a,b)-*n* $\implies$ f $\uparrow$ [*illetve* $\downarrow$] (a,b)-*n*.

6. Milyen szükséges és elégséges feltételeket ismer dierenciálható függvény monotonitásaival kapcsolatban?

7. Tétel (A monotonitás és a derivált kapcsolata). *Legyen* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy* $f \in D(a,b)$*. Ekkor*

1. $f \nearrow$ [*illetve* $\searrow$] (a,b)-*n* $\iff$ $f' \geq 0$ [*illetve* $f' \leq 0$] (a,b)-*n;*

7. Hogyan szól a lokális széls®értékre vonatkozó els®rend¶ elégséges feltétel?

8. Tétel (A lokális szélsóértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel). *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- $f \in D(a,b)$,
- *egy* $c \in (a,b)$ *pontban* $f'(c) = 0$ *és*
- *az* f' *deriváltfüggvény előjelet vált* c-*ben.*

Ekkor,

1. *ha az* f' *függvény a* c *pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor* c *az* f *függvénynek lokális minimumhelye,*
2. *ha az* f' *függvény a* c *pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor a* c *pont az* f *függvénynek lokális maximumhelye.*

8. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

2. Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Azt mondjuk, hogy* $\boldsymbol{f}$ **kétszer deriválható az** $\boldsymbol{a}$ **pontban** $\Big($*jelölése:* $\boxed{f \in D^2\{a\}}$ $\Big)$, *ha*

- $\exists r > 0$: $f \in D\big(K_r(a)\big)$, *és*
- *az* f' *deriváltfüggvény deriválható* a-*ban, azaz* $f' \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

az $\boldsymbol{f}$ **függvény** $\boldsymbol{a}$**-beli második deriváltja**.

9. Írja le a lokális széls®értékre vonatkozó másodrend¶ elégséges feltételt!

9. Tétel (A lokális szélsóértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel). *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- f *kétszer deriválható egy* $c \in (a, b)$ *pontban, azaz* $f \in D^2\{c\}$,
- $f'(c) = 0$ *és*
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c *lokális szélsőértékhelye az* f *függvénynek, és*

1. *ha* $f''(c) > 0$, *akkor* f*-nek* c*-ben lokális minimuma van,*
2. *ha* $f''(c) < 0$, *akkor* f*-nek* c*-ben lokális maximuma van.*

10. Mondjon példát olyan kétszer deriválható függvényre, amelynek egy adott pontban az els® és a második deriváltja nulla, de a függvénynek nincs lokális széls®értéke a pontban!

különböző lehetőségeket mutatják például az $f(x) := x^3$, $f(x) := x^4$ és az $f(x) := -x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek.