1. Jellemezze az a alapú exponenciális függvény konvexitását!

Az $\exp_a$ függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-n, ha $a > 0$ és $a \neq 1$. Ez abból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\exp_a(x)\right)'' = \left(\exp_a(x) \ln a\right)' = \exp_a(x) \ln^2 a > 0.$$

Ha $a = 1$, akkor az $\exp_a \equiv 1$ lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv $\mathbb{R}$-n, de nem szigorú értelemben.

2. Jellemezze az a alapú logaritmusfüggvény konvexitását!

A $\log_a$ függvény szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n, ha $a > 1$, és szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n, ha $0 < a < 1$, hiszen minden $x > 0$ esetén

$$\left(\log_a(x)\right)'' = \left(\frac{1}{x \ln a}\right)' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \begin{cases} < 0, \text{ha } a > 1, \\ > 0, \text{ha } 0 < a < 1, \end{cases}$$

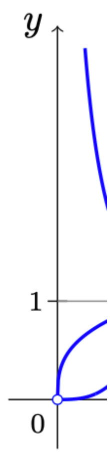
mivel $\ln a > 0$, ha $a > 1$, illetve $\ln a < 0$, ha $0 < a < 1$.

3. Jellemezze az általános hatványfüggvény konvexitását!

Az x^α függvény konvexitása is függ az α értéktől. Valóban, minden $x > 0$ esetén

$$(x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}.$$

Tehát az $\alpha(\alpha-1)$ előjelén múlik a függvény konvexitása. Ha $\alpha > 1$ vagy $\alpha < 0$, akkor $(x^\alpha)'' > 0$, és így az x^α függvény konvex $(0, +\infty)$-n. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $(x^\alpha)'' < 0$, és így az x^α függvény konkáv $(0, +\infty)$-n. Ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, akkor x^α lineáris függvény, azaz egyszerre konvex és konkáv $(0, +\infty)$-n, de nem szigorú értelemben.



4. Adja meg, hogy a sin függvény melyik intervallumokon konvex!

A* sin *függvény

- $\downarrow [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en, $\uparrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en és $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$-n,
- szigorúan konvex $[-\pi, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0, \pi]$-n,
- 0 inflexiós pont.

5. Adja meg, hogy a cos függvény melyik intervallumokon konkáv!

A* cos *függvény

- $\uparrow [-\pi, 0]$-n és $\downarrow [0, \pi]$-n,
- szigorúan konvex $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$-n,
- $\pm\frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.

6. Értelmezze a tg függvényt, és adja meg, hogy melyik intervallumokon konvex!

Definíció. *A* **tangensfüggvényt** *így értelmezzük:*

$$\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

szigorúan konvex $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,

7. Adja meg, hogy az arc sin függvény deriváltját!

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}.$$

8. Értelmezze a arc tg függvényt, és adja meg a lim arc tg(x) határértéket!
x→+∞

$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R},\ \mathcal{R}_{\operatorname{arc\,tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}.$$

9. Mi az aszimptota deníciója?

3. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy* **az f függvénynek van aszimptotája $(+\infty)$-ben**, *ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes **az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben**.
A függvény $(-\infty)$-beli aszimptotáját *is hasonló módon értelmezzük.*

10. Milyen állítást ismer a (+∞)-beli aszimptota meghatározására?

3. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.