1. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt!

5. Tétel (A második helyettesítési szabály). *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$, $\mathcal{R}_g = I$, $g \in D(J)$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$ J-n) és az $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

2. Deniálja az x0 pontban elt¶n® integrálfüggvényt!

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Az*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

függvényt **az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvényének** *nevezzük.*

3. Fogalmazza meg az integrálfüggvény folytonosságáról szóló tételt!

1. Tétel (Az integrálfüggvény folytonossága). *Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Ekkor $F \in C[a,b]$.*

4. Fogalmazza meg az integrálfüggvény deriválthatóságáról szóló tételt!

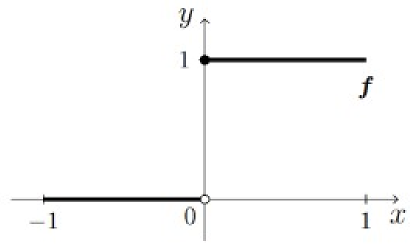
2. Tétel (Az integrálfüggvény deriválthatósága). *Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Tegyük fel, hogy $x \in (a,b)$ olyan pont, amire $f \in C\{x\}$ teljesül. Ekkor $F \in D\{x\}$ és $F'(x) = f(x)$.*

5. Igaz-e az, hogy minden nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitív függvénye? A válaszát indokolja!

2. Következmény: minden nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitív függvénye.

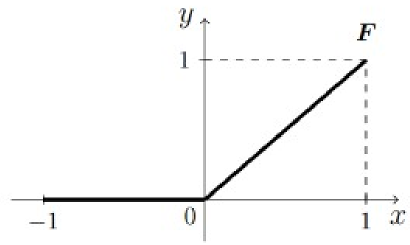
Példa. Ha $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x \le 1), \end{cases}$$



akkor az $x_0 = 0$ pontban eltűnő integrálfüggvény

$$F(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ x & (0 \le x \le 1). \end{cases}$$



6. Deniálja az [a, b] intervallumon a primitív függvényt!

2. Definíció. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény egy* **primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon**, *ha*

- $F \in C[a, b]$,
- $F \in D(a, b)$ *és* $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a, b)\big)$.

7. Hogyan szól a NewtonLeibniz-formula?

3. Tétel (Newton–Leibniz-formula). *Tegyük fel, hogy*

- $f \in R[a, b]$ *és*
- *az f függvénynek van primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon.*

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

8. Mikor mondjuk, hogy egy f : [a, b] → R függvény rektikálható?

3. Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy a*

$$\Gamma_f := \Big\{ \big(x, f(x)\big) \;\Big|\; x \in [a,b] \Big\}$$

függvénygrafikon ***rektifikálható*** *(vagy más szóval* **van ívhossza***), ha*

$$\ell\big(\Gamma_f\big) := \sup\Big\{ \ell_f(\tau) \;\Big|\; \tau \in \mathcal{F}[a,b] \Big\} < +\infty.$$

Ezt a valós számot a szóban forgó függvénygrafikon **ívhosszának** *nevezzük.*

9. Írja le a függvény grakonjának ívhosszáról tanult képletet! Milyen feltételek mellett alkalmazható a képlet?

4. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ és tegyük fel, hogy $f \in C^1[a,b]$. Ekkor az f függvény*

$$\Gamma_f := \Big\{ \big(x, f(x)\big) \;\Big|\; x \in [a,b] \Big\}$$

grafikonjának van ívhossza, és az egyenlő az

$$\ell\big(\Gamma_f\big) = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx$$

határozott integrállal.

10. Írja le a függvény grakonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatáról szóló képletet!

4. Definíció. *Legyen $0 \le f \in R[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó*

$$A_f := \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; a \le x \le b,\; y^2 + z^2 \le f^2(x) \Big\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

integrállal.