1. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat konvergens az R n euklideszi téren?

**2. Definíció.** *Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozata* **konvergens**, *ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^n,\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k > k_0 \colon \|x_k - A\| < \varepsilon.$$

*Ha A létezik, akkor az egyértelmű, és A-t az $(x_k)$ sorozat* **határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim(x_k) = A, \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = A, \qquad x_k \to A,\ \text{ha } k \to +\infty.$$

*Az $(x_k)$ sorozat* **divergens**, *ha nem konvergens.*

2. Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája és a koordinátasorozatainak konvergenciája között?

**1. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Egy $\mathbb{R}^n$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens, és a határértéke a határvektor megfelelő koordinátája, azaz*

$$\mathbb{R}^n \ni x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \to A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right), \quad \text{ha}\ \ k \to +\infty$$

*pontosan akkor igaz, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ koordinátára*

$$x_k^{(i)} \to A^{(i)}, \quad \text{ha}\ \ k \to +\infty.$$

3. Mikor mondjuk, hogy egy f ∈ R n → R m függvény folytonos egy adott pontban?

**3. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény* **folytonos az $\boldsymbol{a \in \mathcal{D}_f}$ pontban**, *(jelben $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$), ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, \|x - a\| < \delta \colon \left\|f(x) - f(a)\right\| < \varepsilon.$$

4. Mit mond a folytonosságra vonatkozó átviteli elv R n → R m típusú függvények esetén?

**4. Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv).** *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty} x_k = a \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a).$$

5. Milyen kapcsolat van egy függvény folytonossága és a koordinátafüggvényei folytonossága között?

**5. Tétel.** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$*. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i \in C\{a\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

*ahol* $f_i : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ *az* $f$ *függvény koordinátafüggvényei.*

6. Mikor mondjuk, hogy egy f ∈ R n → R m függvénynek van pontbeli határértéke?

**4. Definíció.** *Az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *függvénynek az* $a \in \mathcal{D}'_f$ *pontban* **van határértéke**, *ha* $\exists A \in \mathbb{R}^m$, *hogy*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \|x - a\| < \delta\colon \left\| f(x) - A \right\| < \varepsilon.$$

*Ekkor* $A$*–t a* **függvény** $\boldsymbol{a}$ **pontbeli határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A,\ \text{ha } x \to a.$$

7. Mit mond a határértékre vonatkozó átviteli elv R n → R m típusú függvények esetén?

**7. Tétel (A határértékre vonatkozó átviteli elv).** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \mathcal{D}'_f$*. Ekkor*

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{k \to +\infty} (x_k) = a \text{ esetén } \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = A.$$

8. Adja meg a parciális deriváltak fogalmát!

**1. Definíció.** *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $e_1, \ldots, e_n$ *a kanonikus bázis* $\mathbb{R}^n$*-ben. Az* $f$ *függvénynek az* $a$ *pontban létezik az* $i$*-edik* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *változó szerinti* **parciális deriváltja**, *ha az*

$$F_i : K(0) \ni t \mapsto f(a + te_i)$$

*valós-valós függvény deriválható a* $0$ *pontban. A* $F'_i(0)$ *valós számot az* $\boldsymbol{f}$ **függvény** $\boldsymbol{a}$ **pontbeli,** $\boldsymbol{i}$**-edik változó szerinti parciális deriváltjának** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\partial_i f(a), \quad \partial_{x_i} f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a), \quad D_i f(a).$$

9. Adja meg az iránymenti deriváltak fogalmát!

**2. Definíció.** *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Tegyük fel, hogy* $v \in \mathbb{R}^n$ *egy egységvektor:* $\|v\| = 1$. *A* $f$ *függvénynek az* $a$ *pontban létezik a* $v$ *irányú* **iránymenti deriváltja**, *ha a*

$$F_v : K(0) \ni t \mapsto f(a + tv)$$

*valós-valós függvény deriválható a* $0$ *pontban. A* $F_v'(0)$ *valós számot az* $\boldsymbol{f}$ **függvény** $\boldsymbol{a}$ **pontbeli** $\boldsymbol{v}$ **irányú iránymenti deriváltjának** *nevezzük, és a* $\boldsymbol{\partial_v f(a)}$ *vagy a* $\boldsymbol{f_v'(a)}$ *szimbólummal jelöljük.*

10. Hogyan számítható ki egy iránymenti derivált a parciális deriváltak ismeretében? Adja meg az ehhez elegend® feltételeket!

**1. Tétel.** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Tegyük fel, hogy az* $a$ *pontnak van olyan* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezete, amire minden* $i = 1, 2, \ldots, n$ *index esetén:*

a) $\exists\, \partial_i f(x)$ *minden* $x \in K(a)$ *pontban,*

b) *a* $\partial_i f \colon K(a) \to \mathbb{R}$ *parciális deriváltfüggvény folytonos az* $a$ *pontban.*

*Ekkor az* $f$ *függvénynek az* $a$ *pontból induló tetszőleges* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *egységvektor irányban létezik az iránymenti deriváltja, és*

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \cdot v_i = \partial_1 f(a) \cdot v_1 + \partial_2 f(a) \cdot v_2 + \cdots + \partial_n f(a) \cdot v_n.$$