1. Mikor mondjuk azt, hogy egy f ∈ R → R függvény dierenciálható valamely pontban?

2. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* **differenciálható** (*vagy* **deriválható**), *ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ezt a határértéket az $\boxed{f'(a)}$ *szimbólummal jelöljük, és* **az *f* függvény *a* pontbeli deriváltjának** (*vagy* **differenciálhányadosának**) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

2. Mi a kapcsolat a pontbeli dierenciálhatóság és a folytonosság között?

1. Tétel (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

a) $f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$,

b) Az állítás megfordítása nem igaz.

3. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli dierenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

3. egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli dierenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

4. ha még a $g(a) \neq 0$ *feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

5. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli dierenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

3. Tétel (Összetett függvény deriváltja). *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ *pontban* $g \in D\{a\}$*, továbbá* $f \in D\{g(a)\}$*. Ekkor* $f \circ g \in D\{a\}$*, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

6. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a dierenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

5. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének deriváltja). *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$*. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R *konvergenciasugara pozitív, és jelölje* f *az összegfüggvényét:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D\{x\}$ *és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

7. Mi az érintő deníciója?

3. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény grafikonjának az* $(a, f(a))$ *pontban* **van érintője**, *ha* $f \in D\{a\}$*. Az* f *függvény grafikonjának* $(a, f(a))$ *pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

8. Milyen tételt tanult az inverz függvény dierenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

4. Tétel (Inverz függvény deriváltja). *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$