1. Mi a konvex függvény deníciója?

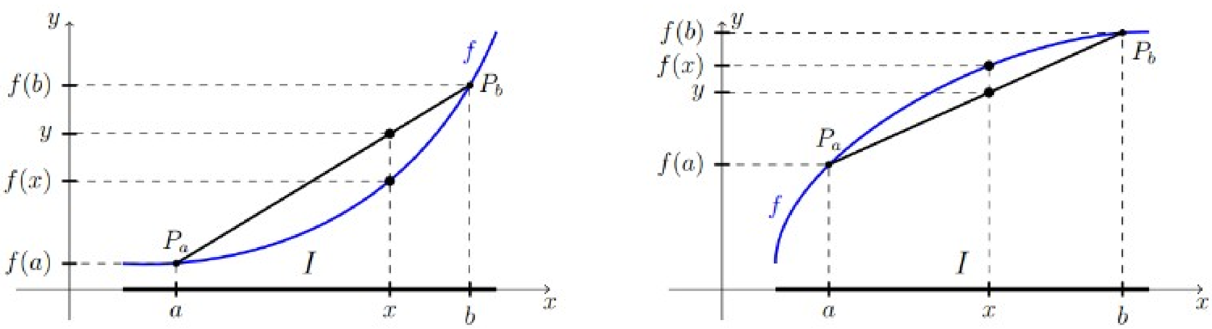
1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $I \subset \mathcal{D}_f$ egy intervallum. Ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén igaz az, hogy*

- *ha $\forall x \in (a,b)\colon f(x) \le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konvex az I intervallumon**,
- *ha $\forall x \in (a,b)\colon f(x) \ge \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konkáv az I intervallumon**,

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex**, *illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

2. Mi a konvexitás geometriai jelentése?

$(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Az alábbi ábrák ezt a ***geometriai jelentést*** illusztrálják, ahol a bal oldali függvény szigorúan konvex, és a jobb oldali függvény szigorúan konkáv.



A szóban forgó húr egyenesének egyenlete:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a), \qquad \text{vagy} \qquad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b).$$

3. Jellemezze egy függvény konvexitását az els® deriváltfüggvény segítségével!

1. Tétel (A konvexitás és a derivált kapcsolata). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(I)$. Ekkor*

1. *f konvex [illetve f konkáv] I-n $\iff$ $f' \nearrow$ [illetve $f' \searrow$] I-n,*
2. *f szigorúan konvex [illetve f szigorúan konkáv] I-n $\iff$ $f' \uparrow$ [illetve $f' \downarrow$] I-n.*

4. Jellemezze egy függvény konvexitását a második deriváltfüggvény segítségével!

2. Tétel (A konvexitás és a kétszeres derivált kapcsolata). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(I)$. Ekkor*

1. *f konvex [illetve f konkáv] I-n $\iff$ $f'' \geq 0$ [illetve $f'' \leq 0$] I-n;*
2. *$f'' > 0$ [illetve $f'' < 0$] I-n $\implies$ f $\begin{array}{c}\text{szigorúan}\\ \text{konvex}\end{array}$ $\left[\text{illetve } f \begin{array}{c}\text{szigorúan}\\ \text{konkáv}\end{array}\right]$ I-n.*

5. Mi az inexiós pont deníciója?

2. Definíció. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $c \in (a,b)$ pont az f függvénynek* **inflexiós pontja**, *ha*

$$\exists \delta > 0\colon f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n} \quad \text{és} \quad \text{konkáv } [c, c+\delta)\text{-n},$$

vagy fordítva.

6. Mit mond az inexiós pontra vonatkozó másodrend¶ szükséges feltétel?

1. A konvexitás és a derivált kapcsolata értelmében, ha $c \in (a,b)$ inflexiós pont, akkor az f' függvény monotonitása megváltozik a c pontban, azaz c az f' függvény lokális szélsőértékhelye. Ezért, ha $f \in D^2\{c\}$ és f-nek a c pontban inflexiója van, akkor $f''(c) = (f')'(c) = 0$. Ezt hívjuk ***az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek***.

7. Mondjon példát olyan kétszer deriválható függvényre, amelynek egy adott pontban a második deriváltja nulla, de a függvénynek ott nincs inexiós pontja!
f(x) = x^4
8. Hogyan viselkedik a függvény grakonjához húzott érint® a függvény inexiós pontjain?

van a c pontban. Ez a jelenség könnyen megfigyelhető az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $c = 0$ pontban, ahol a függvénynek inflexiós pontja van, és ott az érintő egyenlete $e(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

9. Írja le a 0/0 esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

4. Tétel (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben). *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

10. Írja le a +∞/+∞ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

5. Tétel (L'Hospital-szabály a $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetben). *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$