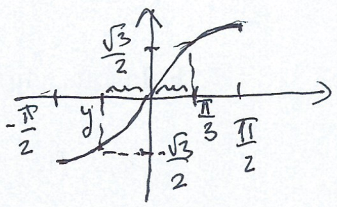
(Hf) 1 a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$

$$\underset{(x\in[-1,1])}{\arcsin x} = \underset{\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{y} \iff \sin y = x$$



Ezért $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \frac{-\sqrt{3}}{2} \iff y = -\frac{\pi}{3}$

Így $\underline{\underline{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}}}$.

b) $\operatorname{arsh}\left(\frac{3}{4}\right) = ?$ $\quad \left(\operatorname{arsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \ (x\in\mathbb{R})\right)$

$$\operatorname{arsh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \underline{\underline{\ln 2}}$$

c) $e^{-2\ln 3} = ?$

$$e^{-2\ln 3} = e^{\ln(3^{-2})} = 3^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}.$$

vagy $e^x = y \ (y>0) \iff x = \ln y \ (x\in\mathbb{R})$

$$y = e^{-2\ln 3} \iff -2\ln 3 = \ln y \iff \frac{\ln y}{\ln 3} = -2$$

$$\iff \log_3 y = -2 \iff y = 3^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}.$$

HF 2. Teljes függvényvizsgálat

a) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \qquad (x \neq 3)$

1. Kezdeti vizsgálatok. f racionális törtfüggvény $\Rightarrow f \in D^\infty$.

$f \geq 0$ és $f(x) = 0 \iff x = -2$.

f nem páros, páratlan vagy periodikus.

2. Monotonitás.

$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^1 \cdot \frac{1\cdot(x-3) - (x+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = -\frac{10(x+2)}{(x-3)^3} = 0 \iff x = -2.$

	$x<-2$	-2	$-2<x<3$	$x>3$
f'	$-$	0	$+$	$-$
f	↓	0	↑	↓
lok		min.		

3. Konvexitás.

$f''(x) = -10 \cdot \frac{1\cdot(x-3)^3 - (x+2)\cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = -10 \cdot \frac{(x-3) - (x+2)\cdot 3}{(x-3)^4} = 10\,\frac{2x+9}{(x-3)^4}$

$f''(x) = 0 \iff x = -9/2$.

	$x<-9/2$	$-9/2$	$-9/2<x<3$	$x>3$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	∩	1/9	∪	∪
		infl.		

4. Határértékek és aszimptoták.

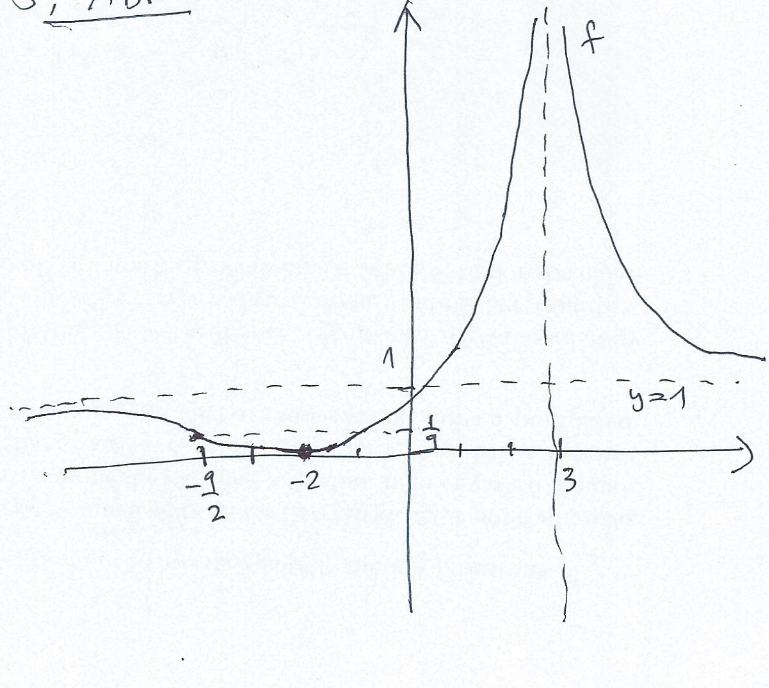
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^2 = \left(\frac{1+0}{1-0}\right)^2 = 1$

ezért $y=1$ aszimptota a $(+\infty)$-ben és $(-\infty)$-ben.

$\lim_{x\to 3\pm 0}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 = \lim_{x\to 3\pm 0}(x+2)^2 \cdot \lim_{x\to 3\pm 0}\frac{1}{(x-3)^2}$

$= 5^2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

5. Ábra



b) $f(x)=x^2e^x \qquad (x\in\mathbb{R})$

1. Kezdeti vizsgálatok. A deriválási szabályok miatt $f\in D^\infty(\mathbb{R})$

$f(x)=0 \iff x=0$, $f(x)\geq 0$.

f nem páros, páratlan vagy periodikus.

2. Monotonitás.

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=e^x(x^2+2x)=e^x\cdot x(x+2)=0 \iff x=0$ v. $x=-2$

	$x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$x>0$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$4e^{-2}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$
lok		max		min	

3. Konvexitás

$f''(x)=e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2)=e^x(x^2+4x+2)=0 \iff x^2+4x+2=0$

$x=-2\pm\sqrt{2}$

	$x<-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$	$x>-2+\sqrt{2}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	0,19	$\frown$	0,38	$\smile$
		infl		infl.	

4. Határértékek, aszimptoták

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^x=(+\infty)^2(+\infty)=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)^2\cdot e^{-x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0,$

így $y=0$ aszimptota a $(-\infty)$-ben.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}xe^x=+\infty$

nincs aszimptota a $(+\infty)$-ben.