1. Deniálja a primitív függvényt!

1. Definíció. *Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f* **primitív függvénye**, *ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.*

2. Milyen elégséges feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Elégséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek van primitív függvénye.*

A folytonosság mint elégséges feltétel azért nem meglepő, mert a bevezetőből sejteni lehet, hogy egy f folytonos függvény területmérő függvénye az f primitív függvénye.

3. Milyen szükséges feltételt ismer primitív függvény létezésére?

Szükséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f* **Darboux-tulajdonságú** *az I intervallumon, azaz tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz (a, b)-ben.*

4. Adjon meg olyan függvényt, amelynek nincs primitív függvénye egy nyílt intervallumon!

Példa. Az előjelfüggvény (vagyis a sgn függvény) a $(-1, 1)$ intervallumon nem Darboux-tulajdonságú, ezért ezen az intervallumon *nincs primitív függvénye.*

5. Adjon meg olyan folytonos függvényt, amelynek primitív függvénye nem elemi függvény!

$$e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \quad \sqrt{x^3 + 1} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

6. Hogyan határozható meg egy nyílt intervallumon értelmezett függvény összes primitív függvényét az egyik primitív függvény ismeretében?

1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.*

1. *Ha $F : I \to \mathbb{R}$ az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.*
2. *Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei az f függvénynek, akkor*

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon F_1(x) = F_2(x) + c \qquad (x \in I),$$

azaz a primitív függvények csak konstansban különböznek egymástól.

7. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

2. Definíció. *Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f* **határozatlan integráljának** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f := \int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\}.$$

Ilyenkor f-re az **integrandus**, *illetve az* **integrálandó függvény** *elnevezéseket is használjuk.*

8. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye, és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

9. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos els® helyettesítési szabály?

3. Tétel (Az első helyettesítési szabály). *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

10. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás szabálya?

4. Tétel (A parciális integrálás szabálya). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$