7. gyakorlat

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 1.

Emlékeztető. Az előadáson láttuk, hogy a gyakorlatban fontos szerepet játszanak olyan függvények, amelyeket a deriválás műveletének „megfordításával” kapunk.

Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f ***primitív függvénye***, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

Ha az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy F primitív függvénye, akkor végtelen sok is van, de azok F-től csak egy konstansban különböznek. Ez az állítás nem igaz, ha f értelmezési tartománya *nem intervallum.*

Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f ***határozatlan integráljának*** nevezzük, és így jelöljük:

$$\int f := \int f(x)\,dx := \big\{F : I \to \mathbb{R} \;\big|\; F \in D \text{ és } F' = f\big\}.$$

Ilyenkor f-re az ***integrandus***, illetve az ***integrálandó függvény*** elnevezéseket is használjuk.

Ha $F \in \int f$, akkor ezt az alábbi formában fogjuk írni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (x \in I).$$

Az adott f függvény értelmezési tartományát – vagyis az I intervallumot – mindig feltüntetjük, a $c \in \mathbb{R}$ feltételt a képletbe „beleértjük”, de azt nem írjuk ki.

Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása

Emlékeztető. Az alapintegrálokat `ebben a táblázatban` soroltuk fel.

Tétel. **(A határozatlan integrál linearitása)** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

Az ebbe a körbe tartozó „elemi fogásokkal” megoldható feladatok sokszor nem egyszerűek, mert át kell alakítani az integrandust úgy, hogy fel tudjuk írni alapintegrálok lineáris kombinációjaként.

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x + 2}{\cos 2x - 1}\,dx \quad \big(x \in (0, \pi)\big).$

Megoldás. Az integrandusok „alkalmas” átalakítása után a határozatlan integrál linearitására vonatkozó tételt felhasználva alapintegrálokat kapunk.

a)

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int \left(x\cdot\left(x\cdot x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} dx = \int \left(x\cdot\left(x^{3/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} dx =$$

$$= \int \left(x\cdot x^{3/4}\right)^{1/2} dx = \int x^{7/8}\,dx = \frac{x^{7/8+1}}{7/8+1} + c = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}} + c \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

b)

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - 2\,\frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - 2\operatorname{arc\,tg} x + c \quad (x\in\mathbb{R}).$$

c)

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \int \left(\frac{1}{x} + 2x^{-2} + x^{-3}\right) dx =$$

$$= \ln x + 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + c = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \qquad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

d)

$$\int \frac{3\cos^2 x + 2}{\cos 2x - 1}\,dx = \int \frac{3(1-\sin^2 x) + 2}{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}\,dx = \int \frac{5 - 3\sin^2 x}{-2\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right) dx = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\operatorname{ctg} x + c \qquad \big(x\in(0,\pi)\big).$$

Az első helyettesítési szabály és speciális esetei

Emlékeztető. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást tanultuk. Az első a következő szabályt mondja ki.

***Tétel.* (Az első helyettesítési szabály)** *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f\circ g)\cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x\in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Az első helyettesítési szabály akkor használható, ha az $\int f\circ g\cdot g'$ integrált kell kiszámítanunk, és ismerjük f egy primitív függvényét. Azonban gyakran nem vesszük észre, hogy ilyen típusú integrállal állunk szembe, ezért érdemes néhány speciális esetet külön is megjegyezni.

- $\int \frac{f'}{f}$ ***alakú integrálok***: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c \quad (x\in I)}.$$

- $\int f^\alpha\cdot f'$ ***alakú integrálok***: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, akkor

$$\boxed{\int f^\alpha(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (x\in I)}.$$

  Ha $\alpha\in\mathbb{N}$, akkor az $f > 0$ feltétel nem szükséges.

- ***$\int f(ax+b)\,dx$ alakú integrálok (lineáris helyettesítés)***: Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad (ax+b \in I)}.$$

A fenti speciális eseteket úgy kapjuk meg az első helyettesítési szabályból, hogy az első esetben legyen $f(x) := 1/x$ $(x > 0)$, a második esetben legyen $f(x) := x^\alpha$ $(x > 0)$ (vagy $x \in \mathbb{R}$, ha $\alpha \in \mathbb{N}$), illetve a második esetben legyen $g(x) := ax + b$ $(ax + b \in I)$.

Úgy tudjuk ellenőrizni, hogy a kiszámított primitív függvény helyes, ha ezt deriváljuk és visszakapjuk az integrandust.

2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big),$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx \quad \big(x \in (1, +\infty)\big),$

d) $\displaystyle\int \cos(5x-3)\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

f) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx \quad \Big(x \in \big(0, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big),$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$

Megoldás. A feladatmegoldások során először általában az integrandust „alkalmas módon” át kell alakítanunk ahhoz, hogy az előző képleteket használni tudjuk.

a)

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, akkor

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + c.$$

c) Ha $x \in (1, +\infty)$, akkor

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus és } \ln x > 0, \text{ mert } x > 1\right) = \ln(\ln x) + c.$$

d) Lineáris helyettesítéssel:

$$\int \cos(5x-3)\,dx = \frac{\sin(5x-3)}{5} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

e) Az integrandus átalakításához a

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságot alkalmazzuk.

Így

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^5 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \int (\sin^5 x - \sin^7 x) \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int \Big(\sin^5 x \cdot \cos x - \sin^7 x \cdot \cos x\Big) \, dx = (f^\alpha \cdot f' \text{ típus}) =$$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

f) A már ismert

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

összefüggésből (azt mondjuk, hogy $\sin^2 x$-et „linearizáltuk”)

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \Big(\text{lineáris helyettesítés}\Big) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

g) Ha $x \in (0, \pi/2)$, akkor $\operatorname{tg} x > 0$ és

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} \, dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-3/2} \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx =$$

$$= (f^\alpha \cdot f' \text{ típus}) = \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c.$$

h) Vegyük észre, hogy

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \qquad \text{és} \qquad \int \frac{1}{1+t^2} \, dt = \operatorname{arc\,tg} t + c \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Alkalmazzuk az első helyettesítési szabály általános alakját az

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad g(x) = \ln x$$

szereposztással:

$$\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \, dx = \int \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot (\ln x)' \, dx = \operatorname{arc\,tg}(\ln x) + c \qquad \Big(x \in (0, +\infty)\Big).$$

Parciális integrálás

Emlékeztető. A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás.

Tétel. **(A parciális integrálás szabálya)** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx \qquad (x \in I).$$

A parciális integrálást akkor célszerű használni, ha a jobboldalon álló $\int f'g$ integrált ki tudjuk valamilyen módszerrel számolni, akár egy újabb parciális integrálás alkalmazásával.

Van **három alaptípus**, amelyeknél érdemes lehet parciálisan integrálni.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Az

$$\int P(x)\cdot T(ax+b)\,dx \qquad \big(x\in\mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálok, ahol P egy tetszőleges polinom és $T\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben legyen

$$f(x):=P(x) \quad \text{és} \quad g'(x):=T(ax+b) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A g függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. Annyi parciális integrálásra lesz szükség, mint amennyi a P polinom fokszáma.

3. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int x\cdot\sin x\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$, *b)* $\displaystyle\int (x^2+3x)\cdot e^{2x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$.

Megoldás. Mindkét esetben a parciális integrálás szabályát fogjuk alkalmazni.

a) Alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x):=x,\quad g'(x):=\sin x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

szereposztással. Ekkor $f'(x)=1$ $(x\in\mathbb{R})$ és g a sin függvény egy primitív függvénye. Az egyszerűség kedvéért legyen $g(x):=-\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$. Így

$$\int x\cdot\sin x\,dx=\int x\cdot(-\cos x)'\,dx=x(-\cos x)-\int (x)'\cdot(-\cos x)\,dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

b) Kétszer fogunk egymás után parciálisan integrálni.

$$\int (x^2+3x)\cdot e^{2x}\,dx=\int (x^2+3x)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=(x^2+3x)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int (x^2+3x)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{(x^2+3x)\,e^{2x}}{2}-\int (2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=\frac{(x^2+3x)\,e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[\int (2x+3)\cdot e^{2x}\,dx\right].$$

Másrészt

$$\int (2x+3)\cdot e^{2x}\,dx=\int (2x+3)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=(2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int (2x+3)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{(2x+3)\,e^{2x}}{2}-\int 2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx=\frac{(2x+3)\,e^{2x}}{2}-\int e^{2x}\,dx=\frac{(2x+3)\,e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}+c.$$

Összefoglalva

$$\int (x^2+3x)\cdot e^{2x}\,dx=\frac{(x^2+3x)\,e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[\int (2x+3)\cdot e^{2x}\,dx\right]$$

$$=\frac{(x^2+3x)\,e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{(2x+3)\,e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}\right]+c=\frac{(x^2+2x-1)\,e^{2x}}{2}+c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Az

$$\int P(x)\cdot G^n(ax+b)\,dx \qquad \Big(ax+b\in\mathcal{D}_G,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0, n\in\mathbb{N}^+\Big)$$

alakú határozatlan integrálok, ahol P egy tetszőleges polinom és $G\in\{\ln,\ \text{arc}\ ...,\ \text{ar}\ ...\}$. Ebben az esetben legyen

$$f(x):=G^n(ax+b) \quad \text{és} \quad g'(x):=P(x) \qquad (ax+b\in\mathbb{R}).$$

Az $f'\,g$ függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. Annyi parciális integrálásra lesz szükség, mint az n értéke. Sajnos ez a módszer általában elég bonyolult integrálokhoz vezet, de az egyszerű

$$\int G(ax)\,dx$$

típusú integrálok különös nehézséget nem okoznak.

4. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \ln x\,dx \quad \Big(x\in(0,+\infty)\Big)$, *b)* $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} 3x\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$.

Megoldás. Mindkét esetben a parciális integrálás szabályát fogjuk alkalmazni.

a) Itt azt a *trükköt* használjuk fel, hogy az integrandust az $1\cdot\ln x$ alakban írjuk fel, és ezután alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x):=\ln x \quad \text{és} \quad g'(x)=1 \qquad (x>0)$$

szereposztással. Így

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = \int \ln x\cdot(x)'\,dx = (\ln x)\cdot x - \int(\ln x)'\cdot x\,dx =$$
$$= x\ln x - \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c \qquad (x>0).$$

b) Az integrandust az $1\cdot\operatorname{arc\,tg}3x$ alakban írjuk fel, és ezután alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát az

$$f(x):=\operatorname{arc\,tg}3x \quad \text{és} \quad g'(x)=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

szereposztással. Így

$$\int \operatorname{arc\,tg}3x\,dx = \int 1\cdot\operatorname{arc\,tg}3x\,dx = \int \operatorname{arc\,tg}3x\cdot(x)'\,dx =$$
$$= (\operatorname{arc\,tg}3x)\cdot x - \int(\operatorname{arc\,tg}3x)'\cdot x\,dx = x\operatorname{arc\,tg}3x - \int\frac{3}{1+(3x)^2}\cdot x\,dx =$$
$$= x\operatorname{arc\,tg}3x - \int\frac{3x}{1+9x^2}\,dx = \left(\frac{f'}{f}\ \text{típus}\right) = x\operatorname{arc\,tg}3x - \frac{1}{6}\int\frac{18x}{1+9x^2}\,dx =$$
$$= x\operatorname{arc\,tg}3x - \frac{1}{6}\ln\Big(1+9x^2\Big) + c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Az

$$\int e^{\alpha x+\beta} \cdot T(ax+b)\,dx \qquad \big(x \in \mathbb{R},\;\; \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \text{ és } \alpha, a \neq 0\big)$$

alakú határozatlan integrálok, $T \in \{\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben lehet

$$f(x) := e^{\alpha x+\beta} \quad \text{és} \quad g'(x) := T(ax+b) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

de fordítva is lehet. A g függvényt mindegyik esetben könnyen meg tudjuk határozni. A kapott integrált újra kell parciálisan integrálni hasonló függvényválasztással. Ekkor visszakapjuk a kiinduló integrált. Ha az eredményt egyenletnek tekintjük, akkor ki tudjuk belőle fejezni a keresett integrált.

5. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. Kétszer fogunk egymás után parciálisan integrálni.

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx = \int e^{2x} \cdot (\sin x)'\,dx = e^{2x} \sin x - \int \left(e^{2x}\right)' \cdot \sin x\,dx =$$
$$= e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \cdot \sin x\,dx = e^{2x} \sin x - 2\left[\int e^{2x} \cdot \sin x\,dx\right].$$

Másrészt

$$\int e^{2x} \cdot \sin x\,dx = \int e^{2x} \cdot (-\cos x)'\,dx = e^{2x}(-\cos x) - \int \left(e^{2x}\right)' \cdot (-\cos x)\,dx =$$
$$= -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cdot \cos x\,dx = -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx.$$

Összefoglalva

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx = e^{2x} \sin x - 2\left[\int e^{2x} \cdot \sin x\,dx\right] =$$
$$= e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx\right] =$$
$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx.$$

Az előző egyenlet rendezése után ki tudjuk fejezni a keresett integrált.

$$5\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + c,$$

azaz

$$\int e^{2x} \cdot \cos x\,dx = \frac{e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x}{5} + c.$$