(Af) 1 a) Igazolni kell, hogy

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{3x^2+2y^2} & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban.

Megoldás. A definíció szerint

(*) $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists \delta>0: \forall x\in D_f$ és $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$

! $\varepsilon>0$ rögzített.

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^3y^2}{3x^2+2y^2}-0\right|=|x|^3\cdot\frac{y^2}{3x^2+2y^2}\le|x|^3\cdot\frac{y^2}{2x^2+2y^2}\le$$

$$\le|x|^3\,\frac{x^2+y^2}{2x^2+2y^2}=\frac{1}{2}|x|^3=(**)$$

Ha $\|(x,y)\|<1 \Rightarrow |x|<1$ (hiszen $\sqrt{x^2+y^2}<1 \Rightarrow |x|<1$)

Ekkor

$$(**)\le\frac{1}{2}|x|^2=\frac{1}{2}x^2\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\underbrace{\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2<\varepsilon}_{\text{ha } \|(x,y)\|<\sqrt{2\varepsilon}}$$

Ezért, ha $\delta=\min\{1,\sqrt{2\varepsilon}\}$, akkor (*) teljesül.

---

1 b) Igazolni kell, hogy $g(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ $\left((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)$

nincs határértéke a $(0,0)$ pontban.

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha $y=mx$, akkor

$$g(x,y)=g(x,mx)=\frac{x^2(mx)^2}{x^2(mx)^2+(x-mx)^2}=\frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-m)^2}$$

Ha pedig $x\to0$, akkor

$$g(x,mx)=\frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-m)^2}\longrightarrow\begin{cases}0 & \text{ha } m\ne1\\ 1 & \text{ha } m=1\end{cases}$$

Ezért ha $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0) \Rightarrow g(x_n,y_n)\to1$ $(m=1)$

ha $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0) \Rightarrow g(x_n,y_n)\to0$ $(m=0)$

Így az átviteli elv szerint a függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban.

Hf 2. Iránymenti derivált: $f(x,y) = x e^{xy} - xy$ $P(1,1)$, $u = (3,4)$

Megoldás: Mindkét parciális deriváltak léteznek, és folytonosak $\mathbb{R}^2$-ön.

$$f'_x(x,y) = 1 \cdot e^{xy} + x e^{xy} \cdot y - y = e^{xy} + xye^{xy} - y$$

$$f'_y(x,y) = x \cdot e^{xy} \cdot x - x = x^2 e^{xy} - x$$

$$f'_x(P) = e + e - 1 = 2e - 1, \quad f'_y(P) = e - 1$$

Így $f'(P) = (f'_x(P), f'_y(P)) = (2e-1, e-1)$

Másrészt,

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Ezért, $f'_v(P) = \left\langle (2e-1, e-1), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle =$

$$= \frac{3}{5}(2e-1) + \frac{4}{5}(e-1) = 2e - \frac{7}{5}$$